Nouvelle Edition

Collection $\frac{20^+}{20}$

2ème Génération

Je me prépare aux examens d'accès à :

* La faculté de médecine et de la pharmacie
* La faculté de médecine dentaire

Matières :

- Mathématiques
- Sciences de la vie et de la terre
- Chimie
- Physique

* Résumés des cours
* Modèles de concours avec solutions

Collection $\frac{20^+}{20}$ 2ème Génération

Je me prépare aux examens d'accès à :

* la faculté de médecine et de la pharmacie
* la faculté de médecine dentaire

Matières : • *Mathématiques*
• *Sciences de la vie et de la terre*
• *Chimie*
• *Physique*

* Résumés des cours
* Modèles de concours avec solutions

Auteurs : *Groupe d'inspecteurs et de professeurs*

Dar Al Ouma
Édition et Diffusion
15 - 17 Rue Imam kastalani - Habous - Casablanca
Tél : 05 22.31.94.89 / 05 22 44 07 44 / Fax : 05 22.30.65.69
E-mail : aloumakadiri@gmail.com
Les Editions Maghrébines 2019

بسم الله الرحمن الرحيم

Sommaire

Matière Mathématique

- Signe d'un trinôme : Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ 4
- Identités remarquables : Ensemble de définition d'une fonction 5
- Limites 9
- Limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles en $+\infty$ ou en $-\infty$ 10
- Continuité 18
- Fonction dérivée 29
- Suites numériques 43
- Fonction primitive 51
- Intégral 53
- Fonctions Logarithmes 59
- Fonction exponentielle 66
- Equations différentielles 78
- Les nombres complexes 82
- Géométrie analytique dans l'espace 90
- Dénombrement et probabilités 99

Modèles de concours avec solutions 116

Matière Physique

Préparation aux concours : Rappel de cours

Ondes mécaniques progressives et périodiques 309
Ondes lumineuses 311
La radioactivité 314
Noyaux, Masse, Energie 317
Condensateur – Circuit (RC) 318
Exploiter l'équation horaire UC(t)) 321
Quelques courbes :
Comment tracer l'allure des courbes en e-a.t) 323
Le circuit RL) 324
Circuit RLC) 326
Comment exploiter la 2ème loi de Newton 329
Mouvement de projectile dans un champ de pesanteur 331
Oscillateurs Mécaniques 333

Modèles de concours avec solutions 335

Matière Sciences de la vie et de la terre

UNITE 1 :

Consommation de la matière organique et flux d'energie 178

Chapitre 1: Les réactions responsables de la libération de l'énergie emmagasinée dans la matière cellulaire 179

Chapitre 2 : Rôle du muscle squelettique strié dans la transformation de l'énergie 181

Questions d'évaluation des connaissances 183

Chapitre 1: La notion de l'information génétique 189

Chapitre 2 : Le génie génétique. 198

UNITE 3 :

Transmission de l'information génétique par reproduction séxuée..........199

Chapitre 1 : Reproduction sexuée et le brassage chromosomique et allélique 200

Chapitre 2 : Les lois statistiques de la transmission des caractères héréditaires chez les diploïdes 202

Chapitre 3 : Génétique des populations 208

Chapitre 4 : Génétique des populations. 208

RÉSUMÉ-CONSEQUENCES DE LA LOI DE HW 214

Questions d'évaluation des connaissances..........217

UNITE 5 : LE SYSTÈME IMMUNITAIRE..........226

Chapitre 1: La déscrimination entre le soi et le non soi. 227

Chapitre 2 : La réponse immunitaire non spécifique . 229

Chapitre 3 : La réponse immunitaire spécifique . 232

Chapitre 4 : Le métamorphisme et sa relation avec la tectonique des plaques 241

Questions d'évaluation des connaissances..........238

Chapitre 5 : La mémoire immunitaire. 235

Modèles de concours avec solutions 246

Matière Chimie

Préparation aux concours : Rappel de cours

Chimie Organique 276

Modèles de concours avec solutions 282

Matière

Mathématiques

Scanné avec CamScanner

Signe d'un trinôme
Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

→ **signe de** $ax + b$ $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

→ **Signe et Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$**

Posons $P(x) = ax^2 + bx + c$. $(\Delta = b^2 - 4ac)$

Le discriminant (Δ)	Solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$ $P(x) = 0$	Signe de $P(x)$	Factorisation de $P(x)$
$\Delta < 0$	$S = \phi$	x : $-\infty$ … $+\infty$; $P(x)$: signe de a	$P(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	x : $-\infty$, $-b/2a$, $+\infty$; $P(x)$: signe de a, 0, signe de a	$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
$\Delta > 0$	$S = \{x_1 , x_2\}$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $P(x)$: signe de a, 0, signe de $(-a)$, 0, signe de a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

• <u>Somme et produit des racines d'une équation du second dégré à une seule inconnue.</u>

- Soit α et β les deux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on a

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- Soit p et s deux réels, le système $\begin{cases} x + y = s \\ x . y = p \end{cases}$ admet une solution ssi $S^2 - 4p \geq 0$, les nombres x et y sont solutions de l'équation : $t^2 - st + p = 0$

- <u>**Remarques :**</u>

* Si $a + b + c = 0$ alors les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont 1 et $\frac{c}{a}$
* Si $a + c = b$ alors les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont -1 et $-\frac{c}{a}$
* Les solutions de l'équation $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ sont α et β

Scanné avec CamScanner

Identités remarquables
Ensemble de définition d'une fonction

→ Identités remarquables.

Soit a et b deux nombres réels. On a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

→ Ensemble de définition dune fonctions numérique :

f est une fonction numérique de la variable réelle *x* définie par :	Ensemble de définition de la fonction *f*
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0 \}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0 \}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) > 0 \}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0 \right\}$

Scanné avec CamScanner

Exemples d'applications :

1 Déterminer le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

$2x-1$ et $-4x-5$, puis résoudre les inéquations suivantes : $2x-1>0$; $-4x-5<0$; $(2x-1)(-4x-5)<0$

Rép :

- Signe de $(2x-1)$.

On a $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe on déduit que $2x-1>0$ pour tout x de $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

- Signe de $(-4x-5)$.

On a : $-4x-5=0$ équivant $x=-5/4$

x	$-\infty$		$-5/4$		$+\infty$
$-4x-5$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signe on déduit que $(-4x-5)<0$ pour tout x de $]-5/4, +\infty[$.

- Pour la résolution de $(2x-1)(-4x-5)<0$ on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-5/4$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-4x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-1)(-4x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $(2x-1)(-4x-5)<0 \leftrightarrow x \in]-\infty, -5/4[\cup]1/2, +\infty[$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : 3x^2+5x-12=0$ $\qquad$ $(E_2) : x^2+3x+4=0$ $\qquad$ $(E_3) : x^2+4x+4=0$

Rép :

- Le discriminant Δ de l'équation (E_1) est $\Delta=169=13^2$. $\Delta>0$

(E_1) admet deux solutions : $x_1=\dfrac{-5-13}{6}=-3$ et $x_2=\dfrac{-5+13}{6}=\dfrac{4}{3}$

d'où $S=\left\{-3, \dfrac{4}{3}\right\}$

- Le discriminant Δ de l'équation (E_2) est $\Delta=-7$, $-7<0$

donc (E_2) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

- Le discriminant Δ de l'équation (E_3) est $\Delta=0$

Donc (E_3) admet une solution double $x_1=x_2=\dfrac{-4}{2}=-2$

D'où , $S=\{-2\}$

3 On considère le polynôme $P(x)=2x^3+7x^2+2x-3$

1) a. Montrer que -1 est une racine du polynôme $P(x)$.

b. Déterminer a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que :

$P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel x.

2) a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+5x-3=0$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$ puis factoriser $P(x)$ en trois polynômes de premier degré.

3) a. Etudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation : $P(x) \geq 0$.

c. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation :
$x(2\sqrt{x}+7)+2\sqrt{x}-3\geq 0$

Rép :

1) a. On a :

$P(-1)=2(-1)^3+7(-1)^2-2-3=-2+7-2-3$

$=0$, donc -1 est une racine du polynôme $P(x)$.

b. On a pour tout réel x,

$(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

donc pour tout réel x,

$P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$ est équivalent à :

$$\begin{cases} a=2 \\ a+b=7 \\ b+c=2 \\ c=-3 \end{cases}$$

i. e : $a=2$, $b=5$, $c=-3$

2) a. Le discriminant de l'équation :

$2x^2+5x-3=0$ est $\Delta=49=7^2$

Puisque $\Delta>0$, cette équation admet deux solutions: x_1

$=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$ et

$x_2=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

b. Résolution de l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ est équivalent à : $(x+1)(2x^2+5x-3)=0$

équivalent à : $x+1=0$ ou $2x^2+5x-3=0$

équivalent à : $x=-1$ ou $x=-3$ ou $x=\frac{1}{2}$

d'où l'ensemble de solutions de l'équation

$P(x)=0$ est $S=\{-3,-1,\frac{1}{2}\}$

Factorisation de $P(x)$:

Comme le trinôme $2x^2+5x-3$ admet deux racines différentes -3 et $\frac{1}{2}$; il peut être factorisé comme suit :

$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3)$

Comme : $P(x)=(x+1)(2x^2+5x-3)$; on obtient

$P(x)=(x+1)(2x-1)(x+3)$.

3) a. Tableau duc signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+5x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b. D'après le tableau du signe de $P(x)$, l'ensemble de solutions de l'inéquation : $P(x)\geq 0$

est $[-3,-1]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

c. Soit $x\geq 0$. On pose $X=\sqrt{x}$.

l'inéquation $x(2\sqrt{x}+7)+2\sqrt{x}-3\geq 0$ devient :

$X^2(2X+7)+2X-3\geq 0$ i.e $P(X)\geq 0$

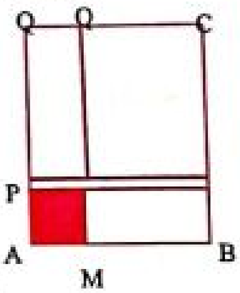
d'après 3) b; on obtient : $X\geq\frac{1}{2}$ (car $X\geq 0$)

Soit $\sqrt{x}\geq\frac{1}{2}$ i.e : $x\geq\frac{1}{4}$

d'où l'ensemble de solutions de l'inéquation

$x(2\sqrt{x}+7)+2\sqrt{x}-3\geq 0$ est : $\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$

4 La figure ci-dessous représente un panneau rectangulaire de 8 mètres (AB = 8) sur 10. (BC = 10) partagé en quatre zones : un carré AMNP et trois rectangles MBRN, NRCQ et PNQD.



Deux artistes sont invités à s'exprimer sur ce panneau : Nouha sur la zone rose et Réda sur la zone bleue.

Quelles sont les positions possibles d'un point M pris sur

Scanné avec CamScanner

le segment [AB] afin que la zone attribuée à Nouha soit au moins égale à celle attribuée à Réda?

On pose $AM = x$;

donc $x \in [0, 8]$

L'aire de la zone rose est :

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(AMNP) + \mathcal{A}(NRCQ)$ où :

$\mathcal{A}(AMNP)$ est l'aire du carré AMNP

et $\mathcal{A}(NRCQ)$ est l'aire du rectangle NRCQ.

On a : $\mathcal{A}(AMNP) = x^2$ et

$\mathcal{A}(NRCQ) = NR \times CR = (8 - x)(10 - x)$

$= x^2 - 18x + 80$

donc $\mathcal{A}_1 = 2x^2 - 18x + 80$

L'aire de la zone bleue est :

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(MBRN) + \mathcal{A}_1(PNQD)$$

On a : $\mathcal{A}(MBRN) = BM \times MN = (8 - x) \times x = -x^2 + 8x$

et $\mathcal{A}(PNQD) = PN \times QN = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

donc : $\mathcal{A}_2 = -x^2 + 18x$

Déterminons x pour que $\mathcal{A}_1 \geq \mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_1 \geq \mathcal{A}_2$ est équivalent à :

$2x^2 - 18x + 80 \geq -2x^2 + 18x$

i.e $4x^2 - 36x + 80 \geq 0$

équivalent à : $x^2 - 9x + 20 \geq 0$

Soit à resoudre cette inéquation sur l'intervalle [0,8]

Le discrimant du trinôme $x^2 - 9x + 20$ est

$\Delta = 1$ ses racines sont 4 et 5.

d'où $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 \geq 0 \\ x \in [0,8] \end{cases}$ est équivalent à :

$x \in [0,4] \cup [5,8]$

5 Trouver l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$

2) $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^3 - 8}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

6) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 2}{x + 3}}$

Rép :

1) $D_f =]-\infty, +\infty[$ car f est une fonction polynôme

2) $x \in D_f \leftrightarrow x^2 - 9 \neq 0$

On a $x^2 - 9 = 0 \leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$

$\leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

donc $D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$

3) $x \in D_f \leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq 0$

On a $x^2 - 3x + 2 = 0 \leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$

$\leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$

donc $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

4) $x \in D_f \leftrightarrow x \geq 0$ et $x^3 - 8 \neq 0$

on a $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$x^3 - 8 = 0 \leftrightarrow x = 2$ ou $x^2 + 2x + 4 = 0$

Le discriminant de $x^2 + 2x + 4$ est :

$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$

donc $x^2 + 2x + 4 > 0$ d'où

$D_f = [0, 2[\cup]2, +\infty[$

5) $x \in D_f \leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$

On a $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

donc $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

6) $x \in D_f \leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$

donc $D_f =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

7) $x \in D_f \leftrightarrow \dfrac{x - 2}{x + 3} \geq 0$ et $x + 3 \neq 0$

le signe de $\dfrac{x - 2}{x + 3}$ est celui de $(x - 2)(x + 3)$

donc $D_f =]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[$

Scanné avec CamScanner

Limites

Limites des fonctions $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $x \to \sqrt{x}$ et leurs inverses

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Si n est nombre impair	Si n est nombre pair
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Opérations sur les limites

<u>Formes indéterminées</u>

$0 \times \infty$	$(+\infty) + (-\infty)$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

Produit $\lim\limits_{x_0} (f \times g)$

$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	F.I	F.I
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Somme $\lim\limits_{x_0} (f + g)$

$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

Quotient : $\lim\limits_{x_0} \left(\frac{f}{g}\right)$

$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	F.I	F.I
$-\infty$	0	0	F.I	F.I

Scanné avec CamScanner

Limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles en $+\infty$ ou en $-\infty$

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, toute fonction polynôme de la variable x a même limite que son terme de plus haut degré.

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, une fonction rationnelle de la variable x a même limite que le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

- <u>Limites de fonctions de type</u> $x \to \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	→	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell > 0$		$\sqrt{\ell}$
$+\infty$		$+\infty$

Ces limites restent valable en x_0 à droite ou x_0 à gauche ou en $+\infty$ ou en $-\infty$

→ **Limites et ordres.**

$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x) - \ell \rvert \leq V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} u(x) - \infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \infty$

Ces limites restent valable en x_0 à droite ou x_0 à gauche ou en $+\infty$ ou en $-\infty$

Scanné avec CamScanner

- **Calcule trignométriques**

α \ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	✕	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
cos	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
sin	$-\sin(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
tan	$-\tan(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\frac{-1}{\tan(\alpha)}$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	$\text{tang}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x).\cos(x)$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \leftrightarrow \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ et } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- **Limites de fonctions trigonométriques**

$(a \neq 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

Scanné avec CamScanner

Exemples d'aplications :

1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 - 4}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

4) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x^2 - x + 18}{x - 2}$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

Rép :

Calculer des limites

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

On a pour tout x de $\mathbb{R}^*$

$$\frac{x^2 - 3x}{x} = \frac{x(x - 3)}{x} = x - 3$$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(x - 3) = -3$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 - 4}{x - 1}$

On a pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$

$$\frac{4x^2 - 4}{x - 1} = \frac{4(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 4(x + 1)$$

d'où $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 - 4}{x} = \lim\limits_{x \to 1} 4(x + 1) = 8$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 4}{x - 2}$

On a pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

d'où $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$

4) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$

On a pour tout x de $\mathbb{R} - \{-3,3\}$

$$\frac{x + 3}{x^2 - 9} = \frac{x + 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x - 3}$$

d'où $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x - 3} = -\dfrac{1}{6}$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x^2 - x + 18}{x - 2}$

On a pour tout x de $\mathbb{R}$

$$-4x^2 - x + 18 = -4(x - 2)\left(x + \frac{9}{4}\right)$$

On a pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\frac{-4x^2 - x + 18}{x - 2} = \frac{-4(x - 2)\left(x + \frac{9}{4}\right)}{x - 2} = -4\left(x + \frac{9}{4}\right)$$

donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x^2 - x + 18}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} -4\left(x + \dfrac{9}{4}\right) = -17$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$. On utilisant la division enclidienne de $3x^3 - 5x^2 + x + 1$ par $(x - 1)$ on obtient: $3x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x - 1)(3x^2 - 2x - 1)$

d'on pour tout x de $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ on a :

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(3x^2 - 2x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1}$$

donc :

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 5x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1} = 0$$

Scanné avec CamScanner

2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + x + 143)$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^2 + x + 7)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 5x + 1}{x + 1}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^2 + x + 1}{x + 2}$

Rép :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + x + 143)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(-3 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{143}{x^3}\right) = -\infty$

$\left(\text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{143}{x^3} = 0\right)$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^2 + x + 7)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(-5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right) = -\infty$

$\left(\text{car } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x^2} = 0\right)$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 5x + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3\left(4 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left[\dfrac{4 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{x}}\right] = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^2 + x + 1}{x + 2}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2\left(-5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x \left[\dfrac{-5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{2}{x}}\right] = +\infty$

3 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{x\sqrt{x}}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 + 3}{|x - 1|}$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-3x^2 + 3}{(x + 2)^2}$

4) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x + 1}$

Scanné avec CamScanner

Mathématiques

Rép :

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{x\sqrt{x}}$

On a pour tout x de $\mathbb{R}^+$

$$\frac{x^2 - x}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x = (\sqrt{x})^2)$$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

$\left(\text{car } \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty\right)$

2) on a : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 + 3}{|x - 1|}$

$\lim\limits_{x \to 1} (4x^2 + 3) = 7$ et $\lim\limits_{x \to 1} |x - 1| = 0^+$

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 + 3}{|x - 1|} = +\infty$

(rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}\ |x| \geq 0$)

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-3x^2 + 3}{(x + 2)^2}$

on a : $\lim\limits_{x \to -2} (-3x^2 + 3) = -9$

$\lim\limits_{x \to -2} (x + 2)^2 = 0^+$

(car le carré est positif)

donc $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-3x^2 + 3}{(x + 2)^2} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x + 1}$

On a pour tout x de $]-1, +\infty[$:

$$\frac{\sqrt{x + 1}}{x + 1} = \frac{\sqrt{x + 1}}{(\sqrt{x + 1})^2} = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$$

d'où

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{\sqrt{x + 1}}{x + 1} = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{x + 1}} = +\infty$$

$\left(\text{car } \lim\limits_{x \to (-1)^+} \sqrt{x + 1} = 0^+\right)$

4 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4 - x^2} + x - 2}{x - 2}$

4) $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{(x + 1)^2 + 4} - 2}{x + 1}$

Rép :

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x}$

On a pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$:

$$\frac{x - \sqrt{x}}{x} = \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

d'où

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$

On a pour tout x de $]1, +\infty[$:

$$\frac{x-1-\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$
$$=1-\frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+} 1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{car } \lim\limits_{x\to 1^+} -(x+1)=-2\\ \text{et } \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}=0^+\end{array}\right)$$

3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2}$

On a pour tout x de $]-2,2[$:

$$\frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}+\frac{x-2}{x-2}$$
$$=\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}\,(x-2)}+1$$
$$=\frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{4-x^2}\,(x-2)}+1$$
$$=\frac{-(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}+1$$

d'où

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}1-\frac{(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{car } \lim\limits_{x\to 2^-} -(2+x)=-4\\ \text{et } \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0^+\end{array}\right)$$

4) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(x+1)^2+4}-2}{x+2}$

On a pour tout x de $]-\infty,-1[$:

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}+\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}-2}{x+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x^2-1})^2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}+\frac{(x+1)^2+4-4}{(x+1)(\sqrt{(x+1)^2+4}+2)}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}+2}$$

d'où $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(x+1)^2+4}-2}{x+2}$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}+2}=-\infty$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{car } \lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}-2}=0\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}\sqrt{(x+1)^2}=0^+\end{array}\right)$$

5

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-\sqrt{x^2+x+4})$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$

Scanné avec CamScanner

Rép :

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+3}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+3}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4-\sqrt{x^2+x+4}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}4-\sqrt{x^2+x+4}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$

On a pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$: $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x}$. On a pour tout x de $]-\infty,-1[$:

$$x+\sqrt{x^2+x}=x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$=x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \quad (x<0)$$

$$=x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\frac{x\left(1-1-\frac{1}{x}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}$. On a pour tout x de $]1,+\infty[$:

$$\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{x\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

$\left(\text{car } \lim\limits_{+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0 \text{ et } \lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x}=0\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$

On a pour tout x de $\mathbb{R}^*+$: $\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+x}$

$$=x\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right)-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$=x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$=x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \text{ et comme :}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=-\infty$$

Scanné avec CamScanner

6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$

Rép :

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} \times 2 = 2$

2) On a : $\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \cdot (x+2)$; posons $t = x^2 - 4$

On obtient : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-2} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} x+2 = 4$

donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2} = 4$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\tan(3x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\tan(3x)}{3x}} \cdot \dfrac{2}{3} = 1 \times \dfrac{1}{1} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 1 - 1 = 0$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot 4 = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$

6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner

Continuité

1) Continuité en un point :

Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert de centre x_0, est dite continue en x_0 si f a une limite au point x_0 et si cette limite est $f(x_0)$.

i.e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Continuité à droite, continuité à gauche :

Une fonction f, définie au point x_0 est dite :

- Continue à droite en x_0 si elle est définie à droite de x_0 et si elle admet en x_0 une limite à droite égale à $f(x_0)$, c'est-à-dire si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

- Continue à gauche en x_0, si elle est définie à gauche de x_0 et si elle admet en x_0 une limite à gauche égale à $f(x_0)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

f continue en x_0 $\leftrightarrow$ f continue à droite et à gauche en x_0

3) Continuité sur un intervalle :

Difinition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$;

On dit que f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

Difinition 2 :

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$

f est dite continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite de a et continue à gauche de b.

4) Image d'un intervalle par une fonction continue :

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

Remarque :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe deux nombres réels α et β de $[a,b]$ tel que : $f([a,b]) = [m,M]$

avec $m = f(\beta) = \inf (f(x))$; $x \in [a,b]$

$M = f(\alpha) = \sup (f(x))$; $x \in [a,b]$

Scanné avec CamScanner

Propriété

L'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est un intervalle.

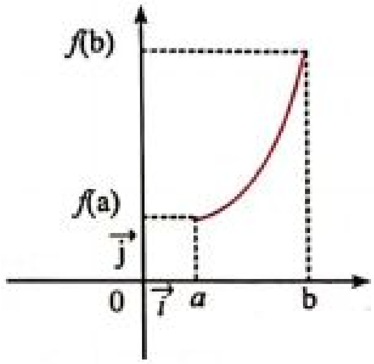
Remarque :

La propriété « $f(I)$ est un intervalle » signifie que si y_1, et y_2 sont deux éléments quelconques de $f(I)$, toute valeur z comprise entre y_1 , et y_2 appartient à $f(I)$.

Nature de l'intervalle $f(I)$ / $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue, strictement monotone

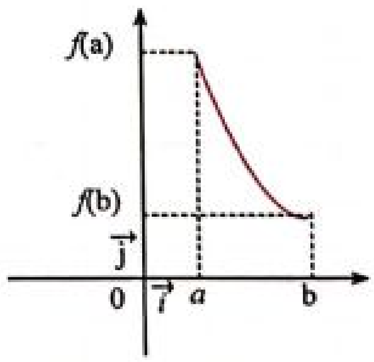
* f strictement croissante sur I

I	$f(I)$
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)\right[$
$]a, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{+\infty} f(x)\right[$
$]-\infty, b]$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f(x), f(b)\right]$



* f strictement décroissante sur I

I	$f(I)$
$[a,b]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty, b]$	$\left[f(b), \lim\limits_{-\infty} f(x),\right[$



5) Théorème des valeurs intermédiaires

* Théorème 1 :

Si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, alors pour tout nombre réel K compris entre $f(a)$ et $f(b)$; il existe au moins un nombre réel C de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c) = K$

- Conséquence 1

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c du segment $[a,b]$.

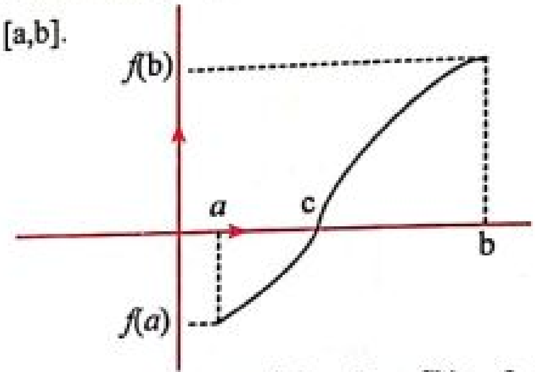
Scanné avec CamScanner

*** Théorème 2 :**

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$
> Alors pour tout nombre réel K compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique nombre réel c de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c) = K$

- Conséquence 1

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[a,b]$.

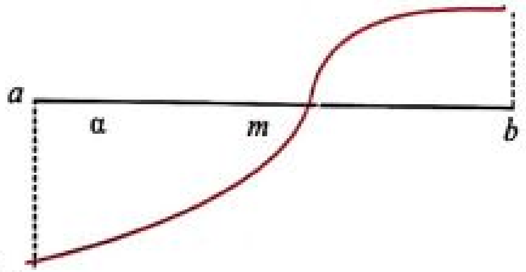


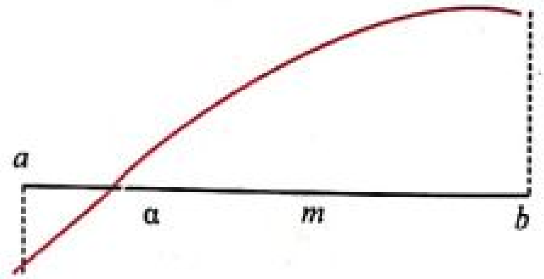
Méthode par dichotomie :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $]a,b[$ tel que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc d'après le théorème des V.I il existe un unique élément α de l'intervalle $]a,b[$ solution de l'équation $f(x) = 0$. On partage l'intervalle $]a,b[$ en deux intervalles de même longueur.

On prend $m = \frac{a+b}{2}$ centre de l'intervalle $]a,b[$. On calcul $f(m)$

- Si $f(m) > 0$ et on a $f(a) < 0$ alors $\alpha \in]a, m[$
- Si $f(m) < 0$ et on a $f(b) > 0$ alors $\alpha \in]m, b[$





Méthode :

> De la même façon on procède sur l'intervalle $[a, m]$ ou $[m, b]$ et on obtient dans chaque cas un encadrement de la solution α ; cette méthode est appelée : Méthode par dichotomie

6) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

a - Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout K de $f(I)$; l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution dans l'intervalle I.

b - Définition :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et soit $J = f(I)$. La fonction qui, au nombre y de $f(I)$, fait correspondre un seul nombre x de I, nombre que l'on note $x = f^{-1}(y)$ est appelée fonction réciproque de f, on la note f^{-1}, on a donc l'équivalence

$$(\mathrm{I})\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \leftrightarrow (\mathrm{II})\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases}$$

Remarque : On a les relations suivantes :

$\forall x \in I : f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y$

c - Propriété de f^{-1} :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I la fonction f^{-1} est :

1°- Strictement monotone sur $J = f(I)$ et varie dans le même sens que f ;

2°- Continue sur $J = f(I)$;

3°- Les graphiques de $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$ dans un plan euclidien rapporté au repère orthonormé (ox, oy) sont symétrique par rapport à la première bissectrice.

Fonction racine nième ($n \in \mathbb{N}^*$) - calcules sur les radicaux

La fonction puissance ($n \in \mathbb{N}^*$) est définie, continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ cette fonction admet donc une fonction réciproque, que nous noterons $\sqrt[n]{\ }$;

et qui est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

On a l'équivalence suivante : $\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \geq 0 \end{cases}$

Résolution de l'équation $x^n = a$; $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du réel a toute solution de l'équation $x^n = a$ la discussion de cette équation est résumée ci-dessous :

$a > 0 \begin{cases} \text{n pair : deux solutions } x = \sqrt[n]{a} \text{ et } x = -\sqrt[n]{a} \\ \text{n impair : une solution } x = \sqrt[n]{a} \end{cases}$

$a < 0 \begin{cases} \text{n pair : pas de solution réelle;} \\ \text{n impair : une seule solution : } x = -\sqrt[n]{|a|} \text{ que l'on convient d'écrire } x = -\sqrt[n]{-a} \end{cases}$

$a = 0$; quelque soit n ; une seule solution : $x = 0$

Propriétés :

$\forall(x) \in \mathbb{R}_+^* ; (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$	$\forall(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} ; \sqrt[n]{x} = y \leftrightarrow x = y^n$	
$q \in \mathbb{N}^* ; \sqrt[n]{\sqrt[q]{x}} = \sqrt[nq]{x}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$p \in \mathbb{Z} ; \sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}} ; x \in \mathbb{R}^+$
$x > 0 ; (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} ; x,y \in \mathbb{R}^+$	$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} ; x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}_+^*$
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$	$\sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p ; x \in \mathbb{R}^+$	$1 = \sqrt[n]{1}$ et $\sqrt[n]{0} = 0$

Exemples d'application :

1

Considérons la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3} & ; x \neq -3 \\ f(-3) = -6 \end{cases}$$

a) Déterminer D ensemble de définition de f

b) f est-elle continue au nombre -3 ?

Rép :

a) La fonction $x \to \dfrac{x^2-9}{x+3}$ est définie pour $x+3 \neq 0$ càd $x \neq -3$

et comme $f(-3) = -6$ alors $D = (\,]-\infty, -3, [\cup]-3, +\infty[\,) \cup \{-3\} = \mathbb{R}$

b) On a : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} x - 3 = -6 = f(-3)$

donc f est continue en -3

2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2} & ; x \neq -2 \\ f(-2) = -3 \end{cases}$$

a) Déterminer D ensemble de définition de f

b) f est-elle continue au point -2 ?

Rép :

a) La fonction $x \to \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ est définie pour $x+2 \neq 0$ càd $x \neq -2$

et comme $f(-2) = -3$ alors $D = (\,]-\infty, -2, [\cup]-2, +\infty[\,) \cup \{-2\} = \mathbb{R}$

b) On a $x^2 + x - 2 = 0 \leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

d'où $\dfrac{x^2+x-2}{x+2} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+2} = x - 1$

donc $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} x - 1 = -2 - 1 = -3 = f(-2)$

i e que f est continue en -2

3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x > 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x & ; x \leq 1 \end{cases}$

a) Déterminer D_f.

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

c) Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles :

$]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

Rép :

a) • La fonction : $x \to \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ est définie si $x \geq 0$ et $x-1 \neq 0$

càd $D_1 = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

• La fonction : $x \to \frac{1}{2}x$ est définie sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 1] = D_2$

donc $D_f = D_1 \cup D_2 =]-\infty, +\infty[$

b) On a :

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

et comme $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2}$

c) On a : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$ donc f est continue en 1

d) Continuité sur $]-\infty, 1[$

$x \to \frac{1}{2}x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) en particulier sur $]-\infty, 1[$

Continuité sur $]1, +\infty[$

La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$

$x \to \frac{1}{2}x$ est continue sur $[0, +\infty[$

• $x \to \sqrt{x} - 1$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ en particulier sur $[1, +\infty[$

• $x \to x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1, +\infty[$

d'où $x \to \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ est continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues.

4

On considère la fonction numérique f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x^2-1}{x+1}, & x > -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$$

Prouver que f est continue en (-1).

Scanné avec CamScanner

Rép :

1- Démontrons que f est continue en (-1) :

On a : $f(-1) = -2$

et pour tout x de $\mathbb{R}$: $x > -1$

On a : $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$= \sqrt{x+1} + \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}$

$= \sqrt{x+1} + x - 1$

donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x+1} + x - 1$

$= -2$

et comme $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ alors f est continue à droite de (-1)

5

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} \ , \ x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0.

Rép :

- Continuité de f en 0

On a : $f(0) = \dfrac{1}{4}$ et pour tout x de :

$[-4, 0[\cup]0, +\infty[$

On a : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$= \dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$= \dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$

et comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

alors f est continue en 0

6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+2}{x^2-3x+2} \ ; \ x \neq 1 \text{ et } x \neq 2 \\ f(1) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 1.

Rép : f continue en 1

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = a$

On a pour tout x de $\mathbb{R} - \{1,2\}$:

$f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+1}{x^2-3x+2} = \dfrac{-4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(x-1)(x-2)}$

$= \dfrac{(-4x-1)}{x-2}$

d'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim \dfrac{-4x-1}{x-2} = 5$

donc f est continue en 1

ssi a = 5

7

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{2x^3 - x}{|x|} & ; \ x \neq 0 \\ h(0) = -1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de h à droite et à gauche de 0.

Rép :

- Continuité de h à droite de 0

On a pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$

$$h(x) = \frac{2x^3 - x}{|x|}$$

et comme : $|x| = x$

on a : $h(x) = \dfrac{2x^3 - x}{|x|} = \dfrac{(2x^3 - x)}{x}$

$= 2x^2 - 1$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2 - 1)$

$= -1 = h(0)$

càd h est continue à droite de 0.

- Continuité de h à gauche de 0

soit x un élément de $\mathbb{R}_-^*$ on a $|x| = -x$

d'où $h(x) = \dfrac{2x^3 - x}{|x|}$

$= -\left(\dfrac{2x^3 - x}{|x|}\right) = -(2x^2 - 1)$

donc $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -(2x^2 - 1)$

$= +1$

et comme $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) \neq h(0)$

alors h n'est pas continue à gauche de 0 :

Conclusion : h n'est pas continue en 0

8

On considère la fonction numérique f dont le tableau des variations est :

x	$-\infty$		-1		0		1		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↘	5	↘	3 || $+\infty$	↘	-2	↗	0	↗	12

Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : (supposons que f est continue sur tout intervalle de son domaine de difinition)

$K =]0, +\infty[$ et $J = [-1, 0[$ et $I = [1,4]$

Scanné avec CamScanner

Rép :

• Détermination de l'image de $I = [1,4]$

D'après les variations de f on a :

f est strictement croissante sur l'intervalle I d'où :

$$f(I) = [f(1); f(4)] = [-2,0]$$

• Détermination de l'image de l'intervalle

$J = [-1, 0[$

d'après les variations de f on déduit que f est strictement décroissante sur J.

d'où $f(J) = f([-1, 0[)$

$=]\lim\limits_{0^+} f(x) ; f(-1)]$

$=]3; 5]$

• Détermination de l'image de l'intervalle

$K =]0, +\infty[$

f n'est pas monotone sur l'intervalle K et admet (-2) comme valeur minimale en 1.

et on a $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 12$

donc $f(K) = f(]0; +\infty[)$

$= [-2; \lim\limits_{0^+} f(x)[$

$= [-2; +\infty[$

9

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

1 - Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 - Vérifier que : $f(1) f(2) < 0$

3 - Déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

4 - Donner un encadrement du nombre α d'amplitude 5.10^{-1}

Rép :

1- f est une fonction polynome

d'où f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

2 - on a : $f(1) = 1$

$f(2) = 8 - 24 + 6 = -10$

d'où $f(1) f(2) < 0$

3 - comme f est continue sur $\mathbb{R}$

alors elle est continue sur $[1 ; 2]$

et comme : $f(1) f(2) < 0$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

4 - On a : $1 < \alpha < 2$

donc on a un encadrement d'anplitude 1

En utilisant la méthode par dichotomie et considérons le centre de l'intervalle $[1,2]$ càd $\frac{3}{2}$

et comme $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-75}{8}$

alors $f\left(\frac{3}{2}\right) f(1) < 0$

donc $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ et cet encadrement à pour amplitude 5.10^{-1}

Scanné avec CamScanner

10 On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

1 - Vérifier que f est continue est strictement croissante sur l'intervalle $[-1,0]$.

2 - Vérifier que : $f(-1) \times f(0) < 0$

3 - Déduire que l'équation : $x^3 - x^2 = -1$ admet une solution unique α tel que : $-1 < \alpha < 0$

Rép :

1- f est un polynome donc elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Et on sait que la fonction : $x \to x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et la fonction : $x \to -x^2 + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ (car $a = -1$) donc f est strictement croissante sur $[-1, 0]$ (car $[-1,0] \subset \mathbb{R}_-$) comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[-1, 0]$.

2 - On a : $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$ et $f(0) = 1$

donc $f(-1) \times f(0) < 0$

3 - conclusion :

L'équation : $x^3 - x^2 = -1$

Equivant : $x^3 - x^2 + 1 = 0$

Equivant : $f(x) = 0$

Et comme f est continue et strictement croissante sur $[-1,0]$ et $f(-1) \times f(0) < 0$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $-1 < \alpha < 0$

11

1 - Démontrer que $x^3 = 5$ admet une solution unique α tel que $+1 < \alpha < 2$

2 - Donner un encadrement du nombre α d'amplitude 25.10^{-2}

Rép :

1- Démontrons que l'équation $x^3 = 5$ admet une solution unique α tel que $+1 < \alpha < 2$.

L'équation $x^3 = 5$ signifie $x^3 - 5 = 0$.

Considérons la fonction numérique f définie par :

$f(x) = x^3 - 5$

On a f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1,2]$ et on a aussi : $f(1) = 1 - 5 = -4$

$f(2) = 8 - 5 = 3$

$f(1) \times f(2) < 0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1 < \alpha < 2$.

2 - Déterminons un encadrement du nombre α d'amplitude 25.10^{-2}

On utilise la méthode par dichotomie

On a : $\alpha \in [1,2]$ considérons $\frac{3}{2}$ le centre de l'intervalle $[1,2]$

On a : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 5 = \frac{-13}{8}$

donc $f\left(\frac{3}{2}\right).f(2) < 0$

d'où $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right[$

L'amplitude de cet encadrement est 5.10^{-1}

Considérons le centre de $\left[\frac{3}{2}, 2\right[$ càd $\frac{7}{4}$

on a : $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{343}{64} = -5 = \frac{23}{64} > 0$

d'où $\alpha \in \left]\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right[$

donc on a trouver un autre encadrement d'amplitude 25.10^{-2}

d'où $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$

12

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1- a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ Montrer que f admet sur l'intervalle $[2 + \infty[$ une fonction réciproque dont on donnera l'ensemble de définition J.

c/ Déterminer $f^{-1}(x)$ $\forall x \in J$.

Rép :

1- Tableau de variation :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 2x - 4 = 0 \leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2 - On a f est continue, strictement croissante sur $[2, +\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1, +\infty[$.

3 - On a : $x \in [-1, +\infty[$ et $y \in [2, +\infty[$ et on a $f^{-1}(x) = y \longleftrightarrow f(y) = x$ c à d $y^2 - 4y + 3 = x$

En utilisant la forme coronique suivante $(y-2)^2 - (2)^2 + 3 = x$ càd $(y-2)^2 = x + 1$ par conséquent :

$y - 2 = \sqrt{x+1}$ ou $y - 2 = \sqrt{x+2}$ et comme $y \in [2, +\infty[$ don $y \geq 2$

càd $y - 2 \geq 0$

d'où $y - 2 = \sqrt{x+1}$ $\Longrightarrow$ $y = 2 + \sqrt{x+1}$

donc $\forall x \in [-1, +\infty[$: $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

Scanné avec CamScanner

Fonction dérivée

1) Dérivabilité d'une fonction en un point - nombre dérivé :

a - f est dérivable en a $\longleftrightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

On pose dans ce cas $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Le nombre $f'(a)$ appelé " le nombre dérivé de la fonction f en a :

b- f est dérivable en a $\leftrightarrow \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

- f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Notation : On note aussi $f' = \dfrac{df}{dx}$

2) Continuité et dérivabilité

Propriété :

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

3) Dérivée d'une fonction composé.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I ; et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(I)$ et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors gof est dérivable en x_0 et et on a :

$$(gof)'(x_0) = f'(x_0) . g'(f(x_0))$$

- Tableau des fonctions dérivées :

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
$x^r \quad r \in Q^*$	rx^{r-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\frac{1}{n} \times \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

$(ku)' = k.u'\ (k \in \mathbb{R})$
$(u+v)' = u' + v'$
$(u \times v)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$
$(u^n) = nu^{n-1} \times u'$

Tangente à une courbe d'une fonction

- Etude de dérivabilité de f en x_0

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	$\longrightarrow$	Cf admet une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0, f(x_0))$ dirigé vers haut.
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	$\longrightarrow$	Cf admet une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0, f(x_0))$ dirigé vers le bat.
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	$\longrightarrow$	Cf admet une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0, f(x_0))$ dirigé vers le bat.
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	$\longrightarrow$	Cf admet une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0, f(x_0))$ dirigé vers le haut.
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a, a \in \mathbb{R}$	$\longrightarrow$	Cf admet une demi-tangente à droite au point $A(x_0, f(x_0))$ coefficient directeur a.
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	$\longrightarrow$	Cf admet une demi-tangente horizontale à droite au point x_0.

Scanné avec CamScanner

Soit f une fonction dérivable en un point x_0 .

La représentation graphique (C) de f admet une tangente au point M_0 $(x_0 , f(x_0))$; qui est la droite passant par M_0, et de coefficient directeur le nombre dérivé de f en x_0.

Cette tangente a donc pour équation dans le repère choisi :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Etudes des branches infinies :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ → La droite d'équation $(x = x_0)$ est asymptote verticale à Cf

$\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) = b$ → La droite d'équation $(y = b)$ est asymptote horizontale à Cf

$\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) = \infty$:

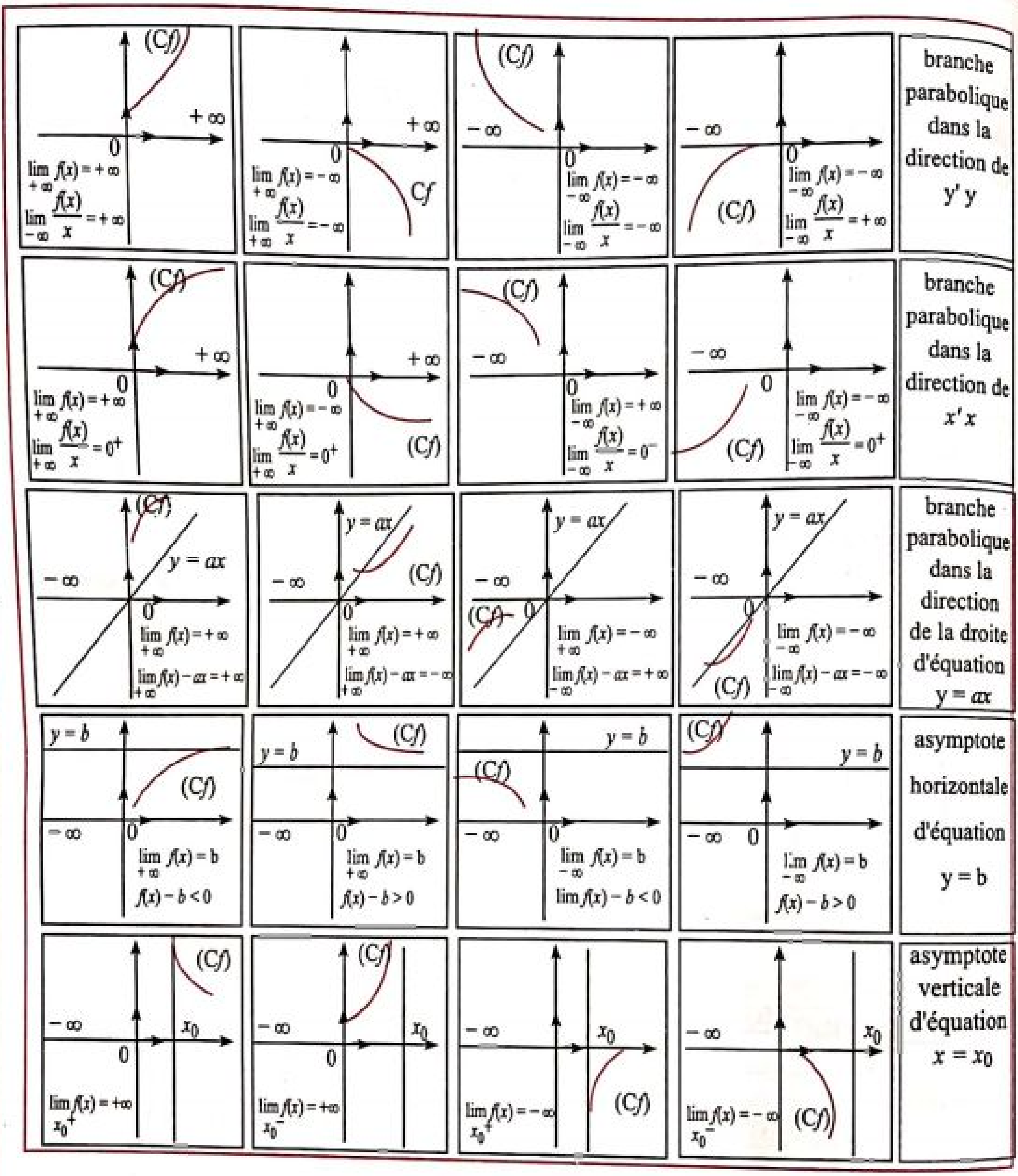
- → $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ → La droite d'équation $y = ax + b$ et asymptote oblique à Cf
- → $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$
  - → $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) - ax = b$ → La droite d'équation $y = ax + b$ et asymptote oblique à Cf
  - → $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} f(x) - ax = \infty$ → Cf admet une branche parabolique dans la direction $y = ax$
- → $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ → Cf admet une branche parabolique dans la direction de $(x'x)$
- → $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ → Cf admet une branche parabolique dans la direction de $(y'y)$

Remarque : On dit que (Cf) admet une "branche infinie" dans les cas suivants :

- $f(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
- $f(x)$ tend vers une limite infinie quand x tend vers x_0 ou vers x_0 à droite ou vers x_0 à gauche ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

$|x| \longmapsto +\infty$ signifie $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$. « ∞ signifie $+\infty$ ou $-\infty$ »

Scanné avec CamScanner



■ <u>Fonction paire</u> - <u>Fonction impaire</u> - <u>Axe de symétrie dune courbe</u> - <u>Centre de symétrie d'une courbe</u>

* <u>Fonction paire :</u>

f est une fonction paire ssi $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ pour tout x de D_f

- f est paire signifie que (C_f) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est paire le domaine d'étude est : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$
- Si f est paire et dérivable sur D_f alors f' est une fonction impaire.

* Fonction impaire :

- f est impaire ssi pour tout $x \in D_f$ on a : $(-x \in D_f)$ et $f(-x) = -f(x)$
- f est impaire signifie que (C_f) admet le point $O(0,0)$ comme centre de symétrie.
- Si f est impaire le domaine d'étude est : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$
- Si f est une fonction impaire et $0 \in D_f$ et f est dérivable en 0 alors le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion.
- Si f est une fonction impaire et dérivable alors f' est une fonction paire.

* Axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

Soient a un réel, et f une fonction numérique définie sur un ensemble D, la droite d'équation $(x = a)$ est l'axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D : $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

* Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

Soient a et b deux réels, et f une fonction numérique définie sur un ensemble D. Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D :

$(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

* Point d'inflexion :

Définition :

On dit qu'une courbe (C_f) admet un point d'inflection A si (C_f) change de concavité en A.

Théorème :

Soit f une fonction numérique dérivable deux fois sur un intervalle I.

- Le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe de f ssi f'' s'annule en a et change de signe au voisinage de a.
- Le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe de f si la fonction f' s'annule en a et ne change pas de signe au voisinage de a. (la réciproque n'est pas toujours vraie)

■ Dérivée de la fonction réciproque :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et soit x_0 un élément de l'intervalle (I) et $y_0 = f(x_0)$ si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et on a : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I si f est dérivable sur l'intervalle I et $(\forall x \in I, f'(x) \neq 0)$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a $\forall x \in f(I)$
$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Remarques :

1

La courbe (Cf)	La courbe (Cf^{-1})
$A(a,b) \in (Cf)$	$A'(b,a) \in (Cf^{-1})$
admet une asymptote verticale d'équation $x = a$	admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$	admet une asymptote verticale d'équation $x = b$
admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$	admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{a}x + \frac{a}{b}$ que l'on obtient à partir de la relation : $x = ay + b$
admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale.	admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale.
admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale.	admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale.

2

$x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et on a : $\forall x \in]0,+\infty[$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur I.

$x \to \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I.

et on a : $\forall x \in I \ (\sqrt[n]{u(x)})' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

Exemples d'applications :

1

Etudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x - 4$ et $x_0 = 2$

2) $f(x) = x^2 + 2$ et $x_0 = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $x_0 = 1$ à droite

4) $f(x) = \sqrt{x-2} + x$ et $x_0 = 2$ à droite

5) $f(x) = x + \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$ à droite

6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $x_0 = 1$

Rép :

1) On a : $f(x) = 3x - 4$ et $x_0 = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(3x-4) - 2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{x-2} = 3$$

donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$

2) On a : $f(x) = x2 + 2$ et $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 2) - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

3) On a : $f(x) = \sqrt{x - 1}$ et $x_0 = 1$ à droite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1} - (0)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1}\,.\sqrt{x - 1}}{(x - 1)\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)\sqrt{x - 1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite de 1.

4) On a : $f(x) = \sqrt{x - 2} + x$ et $x_0 = 2$ à droite

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x - 2} + x) - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2) + \sqrt{x - 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} 1 + \frac{\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \to 2^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite de 2.

5) On a : $f(x) = x + \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$ à droite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite de 0.

6) On a : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}$$

donc f est dérivable en 1 et on a $f'(1) = \frac{1}{3}$

2

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 - Etudier la continuité de f à droite de 0.

2 - Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

Scanné avec CamScanner

Rép :

1- Continuité de f à droite de 0.

On a : $f(0) = 0$

et pour tout $x > 0$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 0$

$\left(\text{car } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

et comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ alors la fonction f est continue à droite de 0.

2 - Dérivabilité de f à droite de 0

On a pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{x} = +\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \end{array}\right)$$

donc f n'est pas dérivable à droite de 0

3

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$

1 - Déterminer Df ensemble de définition de f.

2 - Etudier la dérivabilité de f à droite de 1.

3 - Etudier la dérivabilité de f à gauche de -1.

Rép :

1- Détermination de Df.

$$x \in Df \leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$
$$\leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \geq 0$$
$$\leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

En utilisant le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	−	0	+	

On obtient : $Df =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

2 - dérivabilité de f à droite de 1

Pour tout x de l'intervalle $]1, +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x + 1}{x - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 1}} - 1$$

$$= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1\right) = +\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 1) = 2 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+ \end{array}\right)$$

donc f n'est pas dérivable à droite de 1

3 - dérivabilité de f à gauche de -1

pour tout x de $]-\infty, -1[$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} - \frac{x+1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} - 1$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} - 1$$

d'où $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} - 1$

$= -\infty$

$\left(\begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{x \to (-1)^-} (x-1) = -2 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to (-1)^-} \sqrt{x^2-1} = 0^+ \end{array} \right)$

donc f n'est pas dérivable à gauche de -1

4

Déterminer dans chaqu'une des cas suivants, f' la fonction dérivée de f définie par :

(1) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

(2) $f(x) = (x^2-2)^2 + \sqrt{x}$

(3) $f(x) = (\sqrt{x^2-1} + x)^2$

(4) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

Rép :

Détermination de f' dans chaque cas :

(1) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 1 - 2.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

(2) $f(x) = (x^2-2)^2 + \sqrt{x}$

$$f'(x) = 2(x^2-2)'(x^2-2) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 4x(x^2-2) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(3) $f(x) = (\sqrt{x^2-1} + x)^2$

$$f'(x) = 2(\sqrt{x^2-1} + x)'(\sqrt{x^2-1} + x)$$

$$= 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + 1\right)(\sqrt{x^2-1} + x)$$

$$= 2\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)(\sqrt{x^2-1} + x)$$

$$= 2\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

(4) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$$

$$= \frac{\frac{x(x+1)' - (x+1)(x)'}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$$

$$= \frac{x-(x+1)}{2x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}} = \frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$$

5

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = (x-1)^2 + 2$

1- Déterminer les variations de f.

2- Démontrer que f admet sur $[1, +\infty[$ une fonction réciproque f^{-1}, puis détérminer J ensemble de définition de la fonction f^{-1}.

3- Déterminer $f^{-1}(x)$: $(\forall x \in J)$.

Rép :

1- Variation de f.

On a : $f'(x) = 2(x-1)'(x-1) = 2(x-1)$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 2(x-1) = 0$

$\leftrightarrow x - 1 = 0$

$\leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$

$f(1) = (1-1)^2 + 2 = 2$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

2- f est une fonction polynome donc elle est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1, +\infty[$ et elle est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc elle admet sur $[1, +\infty[$ une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.

donc : $J = f([1, +\infty[)$

$= [f(1) ; \lim f(x)]$

$= [2, +\infty[$

3- Détermination de $f^{-1}(x)$; $(\forall x \in J)$

$y = f^{-1}(x) \leftrightarrow f(y) = x$

$x \in J$, $y \in [1, +\infty[$

$f(y) = x \leftrightarrow (y-1)^2 + 2 = x$

$\leftrightarrow (y-1)^2 = x - 2$

$(x - 2 \geq 0) \quad \leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = \sqrt{x-2} \\ \text{ou} \\ y - 1 = -\sqrt{x-2} \end{cases}$

$x - 1 \geq 0$ on a : $y \in [1, +\infty[$

d'où $f(y) = x \leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x-2}$

$\leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x-2}$

donc $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

6

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

1- Déterminer Df ensemble de définition de f.

2- a/ Démontrer que : $f'(x) = \dfrac{-(x^2+4x+1)}{(x^2-1)^2}$

b/ Déduire les variations de f.

3- Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur l'intervalle $I =]-\infty, -2-\sqrt{3}]$.

4- Déterminer le tableau des variations de f^{-1}

5- Calculer $(f^{-1})'(0)$.

6- Déterminer $(f^{-1})(x)$.

Rép :

1- Détermination de Df.

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$

$x^2 - 1 \neq 0 \leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0$

$\leftrightarrow x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$\leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

donc $Df = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

2- a/ Démontrons que :

$f'(x) = \dfrac{-(x^2+4x+1)}{(x^2-1)^2}$ pour tout x de Df

On a : pour tout x de Df

$f'(x) = \left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)'$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{(x+2)'(x^2-1)-(x+2)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-(x+2).\,2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-(x^2+4x+1)}{(x^2-1)^2}$$

b/ pour tout x de Df, on a $(x^2-1)^2 > 0$

alors le signe de $f\,'(x)$ est le signe contraire de signe de x^2+4x+1

$\Delta = 12$ et $x_1 = -2+\sqrt{3}$ et $x_2 = -2-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘		$f(-2-\sqrt{3})$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	$f(-2-\sqrt{3})$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

$$f(-2-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{6}$$

$$f(-2+\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3)}{6}$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = +\infty$$

3- f est une fonction rationnelle définie sur Df et I est un intervalle inclus dans Df, donc f est continue sur I et comme elle est strictement décroissante sur I, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1}

4- Le tableau des variations de f^{-1} est :

x	$\frac{-\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{6}$		0
$f^{-1}(x)$	$-2-\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

5- On sait que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f\,'(f^{-1})(0))}$

et $f(-2) = 0$ alors $(f^{-1})(0) = -2$

et $f\,'(f^{-1})(0)) = \frac{1}{f\,'(-2)}$

on a : $f\,'(-2) = \frac{-(4-8+1)}{(4-1)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

donc $(f^{-1})'(0) = 3$

6- Détermination de $(f^{-1})(x)$ pour tout x de f(I) .

$$J = f(I) = \left[\frac{\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})}{6}\,;0\right[$$

$y = (f^{-1})(x) \leftrightarrow f(y) = x$

$y \in I$ et $x \in J$

$$f(y) = x \leftrightarrow \frac{y+2}{y^2-1} = x$$

$$\leftrightarrow x(y^2-1) = y+2$$

$$\leftrightarrow xy^2 - y - (x+2) = 0$$

comme $x \neq 0$ alors y est solution du trinôme

$$xy^2 - y - (x+2) = 0$$

$$\Delta = 1 + 4x(x+2)$$

$$\Delta = 4x^2 + 8x + 1$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{4x^2+8x+1}}{2x} \;;\; y_2 = \frac{1+\sqrt{4x^2+8x+1}}{2x}$$

On prend $x = -0{,}1$ on obtient :

$y_1 \approx -11{,}78 \in]-\infty, -2-\sqrt{3}] = $ J et $y_2 \approx 1{,}7 \notin$ J

donc la solution demandée est y_1

càd : $f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{4x^2+8x+1}}{2x}$

7

Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Etudier la concavité de la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 2) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

3) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ 4) $f(x) = \sqrt{2x-2} + x$

Rép :

- Etudions la concavité de la courbe de f.

1) On a : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

$$f'(x) = x^2 + x + 1$$

et $$f''(x) = 2x + 1$$

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow 2x + 1 = 0$$
$$\leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

par conséquent la concavité de Cf est résumée dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Concavité de f	$\cap$	point d'inflexion $\left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{12}\right)$	$\cup$

2) On a : $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

d'où $$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

et $$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow 6x - 2 = 0$$
$$\leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

La concavité de f est résumée dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+1/3$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Concavité de f	$\cap$	point d'inflexion $\left(\frac{1}{3}, \frac{25}{27}\right)$	$\cup$

3) On a : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

d'où $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

et comme : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 0$

alors $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f''(x) > 0$

par conséquent Cf est convexe sur $\mathbb{R}$

4) On a : $f(x) = \sqrt{2x - 2} + x$

d'où pour tout x de $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)'}{2\sqrt{2x-2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2x-2}} + 1$$

$$f''(x) = \frac{-(\sqrt{2x-2})'}{2x-2}$$

$$= -\frac{1}{(2x-2)\sqrt{2x-2}} < 0$$

donc Cf est concave sur $]1, +\infty[$

8

Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'axe de symétrie de la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f(x) = x^2 - 6x + 3$ 1)

$f(x) = 3x^4 - \sqrt{x^2 + 2}$ 2)

$f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$ 3)

Scanné avec CamScanner

Rép :

1) $f(x) = x^2 - 6x + 3$

f est un polynôme de degré 2.

donc sa courbe est une parabole de sommet $\Omega(3, -6)$ est d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$

2) $f(x) = 3x^4 - \sqrt{x^2 + 2}$

On a $Df = \mathbb{R}$

(car $\forall x \in \mathbb{R}$) ; $x^2 + 2 > 0$)

d'où pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = 3(-x)^4 - \sqrt{(-x)^2 + 2}$$
$$= 3x^4 - \sqrt{x^2 + 2}$$
$$= f(x)$$

Cela signifie que f est une fonction paire.

donc sa courbe admet l'axe des ordonnés comme axe de symétrie.

3) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3x - 4}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x - 4 \neq 0\}$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Delta = 25$, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$

$Df = \mathbb{R} - \{-4; 1\}$

Déterminoins le réel a de $\mathbb{R}$ tel que :

$f(2a - x) = f(x)$

on a pour tout x de Df.

$$f(2a - x) = f(x)$$
$$\leftrightarrow \frac{2}{(2a - x)^2 + 3(2a - x) - 4} = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$$
$$\leftrightarrow (2a - x)^2 + 3(2a - x) - 4 = x^2 + 3x - 4$$
$$\leftrightarrow x^2 + 4a^2 - 4ax + 6a - 3x - 4 = x^2 + 3x - 4$$
$$\leftrightarrow 4a^2 - 4ax + 6a - 6x = 0$$
$$\leftrightarrow (-4a - 6)x + (4a^2 + 6a) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} -4a - 6 = 0 \\ 4a^2 + 6a = 0 \end{cases}$$
$$\leftrightarrow a = \frac{-3}{2}$$

on a pour tout x de Df : $(2a - x) \in Df$

et $f(2a - x) = f(x)$

donc la droite d'équation $x = \dfrac{-3}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe Cf.

9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$

1 - Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 - Calculer les deux limites : $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3 - Déduire les branches infinie de la courbe de f.

Rép :

1- Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$
$$= \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

2 - Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{x(x^2 + 1)}$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{x(x^2 + 1)}$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

3- • $f(x) - x = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1} - x = \dfrac{-x + 1}{x^2 + 1}$

et $\lim\limits_{|x| \mapsto \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{|x| \mapsto \infty} \dfrac{-x + 1}{x^2 + 1} = 0$

donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

10

Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que le point I est un centre de symétrie de (C_f) dans chacun des cas suivants :

1) $I(0,2)$; $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2) $I\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$; $f(x) = \frac{5x+1}{1-2x}$

3) $I(-1,-2)$; $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Rép :

1) $I(0,2)$; $f(x) = x^3 - 3x + 2$

On a : $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2a - x = -x \\ 2b = 4 \end{pmatrix}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2$$
$$= -x^3 + 3x + 2$$
$$4 - f(x) = 4 - (x^3 - 3x + 2)$$
$$= -x^3 + 3x + 2$$

donc $f(-x) = 4 - f(x)$

d'où le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f.

2) $I\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$; $f(x) = \frac{5x+1}{1-2x}$

f est une fonction homographique, donc C_f admet un centre de symétrie a pour coordonnées.

$$\left(\frac{-d}{c}, \frac{c}{a}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$$

d'où le centre de symétrie de (C_f) est :

$$I\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$$

3) $I(-1,-2)$; $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

On a : $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

et on a pour tout x de D_f :

$2(-1) - x = -2 - x \in D_f$

car $x \in]-1, +\infty[\leftrightarrow x > -1$

$$\leftrightarrow -x < 1$$
$$\leftrightarrow -2 - x < -1$$
$$\leftrightarrow (-2 - x) \in]-\infty, -1[$$

$x \in]-\infty, -1[\leftrightarrow x < -1$

$$\leftrightarrow -x > 1$$
$$\leftrightarrow -2 - x > -1$$
$$\leftrightarrow (-2 - x) \in]-1, +\infty[$$

et $f(-2-x) = \frac{(-2-x)^2}{(-2-x)+1}$

$$= \frac{4 + 4x + x^2}{-x-1}$$

$$= -\frac{4 + 4x^2 + x^2}{x+1}$$

et $2(-2) - f(x) = -4 - \frac{x^2}{x+1}$

$$= \frac{-4(x+1) - x^2}{x+1}$$

$$= \frac{-4x - 4 - x^2}{x+1}$$

$$= \frac{-4 - 4x - x^2}{x+1}$$

donc $f(-2-x) = -4 - f(x)$

d'où le point $I(-1,-2)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f.

Scanné avec CamScanner

Suites numériques

Suite arithmétique – suite géométrique

	d'une suite arithmétique	d'une suite géométrique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$; r est la raison	$U_{n+1} = qu_n$; q est la raison
Terme général	$U_n = U_p + (n-p)r \quad (p \le n)$	$U_n = U_p \times q^{n-p} \quad (p \le n)$
Somme des termes consécutifs	$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = (n-p+1) \times \left(\frac{U_p + U_n}{2}\right)$	$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = U_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right) \quad q \ne 1$
a,b et c des termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

Suite majorée – suite minorée – suite bornée

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique

$(U_n)_{n\in I}$ est majorée par M $\leftrightarrow (\forall n \in I)$: $U_n \le M$

$(U_n)_{n\in I}$ est minorée par m $\leftrightarrow (\forall n \in I)$: $U_n \ge m$

$(U_n)_{n\in I}$ est bornée $\leftrightarrow$ $(U_n)_{n\in I}$ est à la fois majorée et minorée.

Monotonie d'une suite numérique

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique

$(U_n)_{n\in I}$ est croissante $\leftrightarrow (\forall n \in I)$: $U_{n+1} - Un \ge 0 \quad (U_{n+1} \ge Un)$

$(U_n)_{n\in I}$ est décroissante $\leftrightarrow (\forall n \in I)$: $U_{n+1} - Un \le 0 \quad (U_{n+1} \le Un)$

$(U_n)_{n\in I}$ est constante $\leftrightarrow (\forall n \in I)$: $U_{n+1} = Un$

Limite d'une suite

* Limite de la suite (n^{α}) avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$

Scanné avec CamScanner

* **Limite de la suite (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$**

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite (q^n) n'admet pas de limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

→ Critère de convergence

- Toute suite croissante, majorée est convergente
- Toute suite décroissante, minorée est convergente

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

→ Suite de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Considérons la suite numérique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

tq f est une fonction continue sur un intervalle I avec $f(I) \subset I$ et a un élément de I

Si (u_n) est convergente alors sa limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Exemples d'applications

1

Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 2$; $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 3$

2- Montrer que (u_n) est une suite croissante puis déduire qu'elle est convergente.

3- Soit (v_n) une suite définie par : $v_n = u_n - 3$

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b/ Déterminer v_n et u_n en fonction de n

c/ calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4 – Soit $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$

Rép :

1- * Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n < 3$:

Pour $n = 0$ on a $2 < 3$ donc $u_0 < 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n < 3$ et démontrons que $u_{n+1} < 3$

On a d'après l'hypothèse de récurrence $u_n < 3$ donc $\frac{1}{3}u_n < 3 \times \frac{1}{3}$

d'où $\frac{1}{3}u_n + 2 < 3$ ie que $u_{n+1} < 3$ par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n < 3$

2- * Montrons que (u_n) est croissante :

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{-2u_n + 6}{3}$ et comme $u_n < 3$ alors $-2u_n > -6$

donc $\frac{-2u_n + 6}{3} > 0$ ie que $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

Conclusion : (u_n) est croissante majorée donc elle est convergente.

3- * $v_n = u_n - 3$

a/ on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

b/ Détermination de v_n et u_n en fonction de n

(v_n) est une suite géométrique donc $v_n = v_0.q^n = (-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Et comme $u_n = v_n + 3$ on a $u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c/ $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

4 – * On a $s_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ et (v_n) est une suite géométrique.

alors $s_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (-1) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ donc $s_n = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = -\frac{3}{2}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$

Scanné avec CamScanner

2

Soit (u_n) une suite numérique tel que : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}$

1- Montrer que $u_{n+1} - 1 = 1 - \dfrac{1}{u_n}$

2- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 1$

3- Etudier la monotonie de (u_n) puis déduire que la suite (u_n) est convergente.

4- Soit (v_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$

a/ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

b/ Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c/ calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5 – Soit $s_n = u_0\ \ u_1 \ldots\ldots u_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

Rép :

1- On a : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} - 1 = \dfrac{2u_n - 1 - u_n}{u_n} = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$

donc $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$

2- Pour n = 0 on a $2 > 1$ càd $u_0 > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$

On a : $u_{n+1} - 1 = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ et comme $u_n > 1$ alors $\dfrac{1}{u_n} < 1$ du $\dfrac{-1}{u_n} > -1$

d'où $-\dfrac{1}{u_n} + 1 > 0$ par conséquent $u_{n+1} > 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

3- <u>Monotonie de</u> (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1}{u_n} - u_n \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n} < 0$$

donc la suite (u_n) est décroissante.

* On a (u_n) décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

4- $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$

a/ on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} = \dfrac{-1}{u_n - 1} - \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} = \dfrac{-u_n + 1}{u_n - 1} = -1$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de 1^er^ terme $v_0 = 0$.

b/ (v_n) est une suite arithmétique donc $v_n = v_0 + nr = -n$.

* on a : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ donc $v_n(u_n - 1) = u_n - 2$ càd $v_n u_n - v_n = u_n - 2$

donc $u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

c/ * $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$

Scanné avec CamScanner

- $s_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

$= \cancel{2} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \cancel{\dots} \times \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}} \times \frac{n+2}{\cancel{n+1}}$

$= n+2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$

1 – Dresser le tableau de variation de f sur $I = [1, \frac{3}{2}]$

2- Montrer que $f(I) \subset I$.

3- Montrer que $f(x) \leq x$ sur I

4- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a/ Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 3/2$.

b/ Montrer que (u_n) est décroissante.

c/ Déduire que (u_n) est convergente.

d/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

<u>Rép :</u>

1- On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur I et $\forall x \in I$ $f'(x) = 2x - 2$

x	1		$3/2$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$5/4$

2- Montrons que $f(I) \subset I$

Puisque f est continue et strictement croissante sur I alors $f(I) = f\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f(1), f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \left[1, \frac{5}{4}\right]$

Et comme $\frac{5}{4} \leq \frac{3}{2}$ alors $\left[1, \frac{5}{4}\right] \subset [1, 3/2]$ donc $f(I) \subset I$

3- <u>Signe de $(f(x) - x)$ sur I</u>

On a : $f(x) - x = x^2 - 3x + 2$

Les deux solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

On a $2 \notin$ I et

x	1		$3/2$
$f(x) - x$	0	$-$	

donc $\forall x \in I$: $f(x) \leq x$

4- a/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_n \leq 3/2$

pour $n = 0$ on a $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$ soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 \leq u_n \leq 3/2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

- On a : $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ et f strictement croissante donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$

Scanné avec CamScanner

Càd $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2} \leq \frac{3}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

b/ Montrons que (u_n) est décroissante.

On a d'après la question 3 : $\forall x \in I$ $f(x) \leq x$

Et comme $u_n \in I$ alors $f(u_n) \leq u_n$ ie que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \leq u_n$

donc (u_n) est une suite décroissante.

c/ D'après ce qui procède (u_n) est décroissante minorée par 1 donc elle est convergente.

d/ Calcul de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

on a : f est continue sur I est $f(I) \subset I$

(u_n) convergente et $f(u_n) = u_{n+1}$, donc la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ avec $x \in I$

On a : $f(x) = x \leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ et comme $1 \in I$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

4

I – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$

1- Montrer que f est croissante sur $I = [0, 3]$ et que $f(I) \subset I$

2- Démontrer que $\forall x \in [0, 3]$ $f(x) \geq x$

II- Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = f(u_n)$

1- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 3$

2- Montrer que (u_n) est croissante.

3- Déduire que la suite (u_n) est convergente.

4- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Rép :

I. 1- on a $I = [0, 3]$ et $f(x) = \sqrt{2x+3}$

f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ d'où :

x	0	3
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	$\sqrt{3}$ $\nearrow$	3

On a f est continue et strictement croissante sur $[0, 3]$ donc $f([0, 3]) = [\sqrt{3}, 3]$

d'où $f([0, 3]) \subset [0, 3]$

2 – on a $f(x) - x = \sqrt{2x+3} - x = \dfrac{-x^2+2x+3}{\sqrt{2x+3}+x} = \dfrac{-(x+1)(x-3)}{\sqrt{2x+3}+x}$

Et comme $0 \leq x \leq 3$ alors $-3 \leq x - 3 \leq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$

Par conséquent $\forall x \in [0, 3]$ $f(x) \geq x$

II- 1) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 3$ donc $0 \leq u_0 \leq 3$

Supposons que $0 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

- On a : $0 \leq u_n \leq 3$ et f strictement croissante donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$

càd $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$ d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 3$

2) Monotonie de (u_n)

On a : $\forall x \in I \quad f(x) \geq x$ et $u_n \in I$ donc $f(u_n) \geq u_n$

d'où $u_{n+1} \geq u_n$ càd que la suite (u_n) est croissante .

3) (u_n) est croissante majorée par 3 donc elle est convergente.

4) on a : $f(x) = x \leftrightarrow x = 3$ et $3 \in I$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

5

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1°- a/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$

b/ Etudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

2°- a/ vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4 + u_n} + 2}$

b/ déduire que $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$

c/ Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

d/ calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Rép :

1- a/ pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0$

supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$

on a : $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} - 2 = \dfrac{4 + u_n - 4}{\sqrt{4 + u_n} + 2} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4 + u_n} + 2} \geq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$

b/ on a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 4} - 2 - u_n = \dfrac{(\sqrt{u_n + 4})^2 - (2 + u_n)^2}{\sqrt{u_n + 4} + 2 + u_n}$

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u^2_n - 3u_n}{\sqrt{u_n + 4} + 2 + u_n} = \dfrac{-u_n(u_n + 3)}{\sqrt{u_n + 4} + 2 + u_n} \leq 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

Et comme (u_n) est décroissante ; minorée par 0 alors elle est convergente.

2° - b/ on a $u_n \geq 0$ d'où $u_n + 4 \geq 4$ donc $\sqrt{u_n + 4} \geq 2$

et $\sqrt{u_n + 4} + 2 \geq 4$ par conséquent $\dfrac{1}{\sqrt{u_n + 4} + 2} \leq \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2}$

d'où $\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n + 4} + 2} \leq \dfrac{1}{2} u_n$ donc $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$

c/ on a $0 \le u_1 \le \frac{1}{2} u_0$

$$0 \le u_2 \le \frac{1}{2} u_1$$

$$0 \le u_3 \le \frac{1}{2} u_2$$

$$\vdots$$

$$0 \le u_n \le \frac{1}{2} u_{n-1}$$

Par la multiplication des mombres des inégalités on obtient :

$$0 \le u_n \le \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots\cdots \frac{1}{2}\right)}_{\text{n fois}} . u_0$$

$$0 \le u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n . u_0$$

Càd $\quad 0 \le u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d/ On a $\quad 0 \le u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $0 < \frac{1}{2} < 1$)

et d'après les critères de convergence on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Fonction primitive

→ Fonctions primitives des fonctions continue sur un intervalle

. Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- F est dérivable sur I
- $\forall x \in I$; $F'(x) = f(x)$

. Propriétés :

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

Si F est une primitive de f sur I alors les fonctions primitives de f sur I sont définies par

$x \rightarrow F(x) + k \qquad (k \in \mathbb{R})$

Si f admet une primitive sur I, et soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

→ Fonctions primitives : de somme de deux fonctions – multiplication d'une fonction par une constante

. Propriétés :

Soient f et g deux fonctions défient sur un intervalle I et soit $k \in \mathbb{R}$

Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I

alors :

- F + G est une primitive de f + g sur I.
- kF est une primitive de kf sur I.

Scanné avec CamScanner

→ **Tableau de primitives des fonctions usuelles**

	$f(x)$	$F(x)$
	$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
	x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
	$\sin x$	$-\cos x + k$
	$\cos x$	$\sin x + k$
	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
	e^x	$e^x + k$

→ **Utilisation des formules de la dérivée pour trouver des primitives**

	$f(x)$	$F(x)$	
	$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$	
$(a \in \mathbb{R})$	$a\,u'(x)$	$a\,u(x) + k$	
	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$	
	$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$	
	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$	
	$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$	
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$u'(x) \times [u(x)]^r$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$	
	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$	
	$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$	
$(a \neq 0)$	$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + k$	
$(a \neq 0)$	$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + k$	$(k \in \mathbb{R})$

Intégral

→ Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle :

Soient, f une fonction continue sur [a, b] et F une primitive de f sur [a, b]
L'intégrale de a à b de f est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

→ Propriété

- **Linéarité** :

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$
$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)]dx$	$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- **Relation de chasles** :

$$\forall c \in [a, b] \quad ; \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- **Intégrale et ordre** :

Si : $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$ donc : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$	Si : $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$ donc : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

- **Valeur moyenne** :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a, b]

La valeur moyenne de la fonction f sur [a, b] est le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Scanné avec CamScanner

• <u>Intégration par parties</u> :

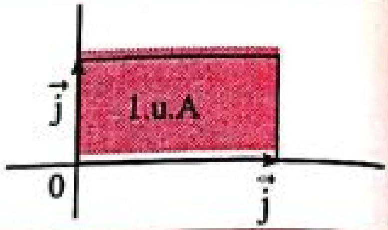
Soient f et g deux fonctions dérivables sur [a, b] telle que :

f' et g' sont continues sur [a, b]

On a : $\int_a^b [f'(x) \times g(x)]dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \times g'(x)]dx$

• <u>L'Aire d'une partie du plan</u> :

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité de l'aire : u.A est l'aire du réctangle limité par le point 0 et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



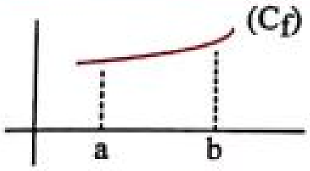
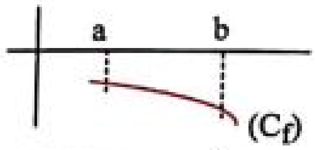
Soit f une fonction continue sur [a, b]. l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right).u.A$$

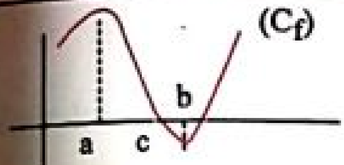
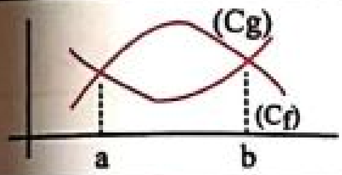
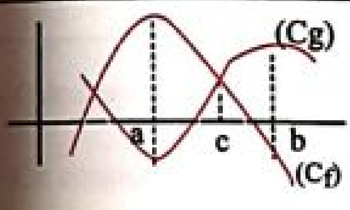
Soient f et g deux fonctions dérivables sur [a, b]. l'aire de la partie du plan délimitée par C_f et C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\right).u.A$$

• <u>Cas particulier</u>

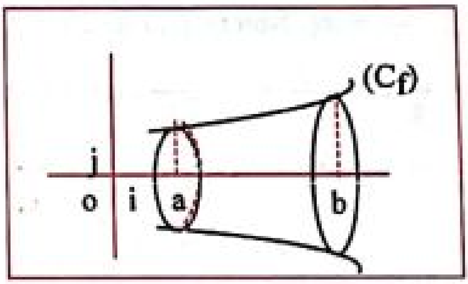
Dessin	Remarques	L'aire de la partie indiquée dans (D)
	f et positive sur [a, b]	$\left(\int_a^b f(x)dx\right).u.A$
	f et négative sur [a, b]	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right).u.A$

Scanné avec CamScanner

Dessin	Remarques	L'aire de la partie indiquée dans (g)
	• f et positive sur [a, c] • f et négative sur [c, b]	$\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx\right)$.u.A
	(C_f) et au dessus de (C_g) sur l'intervalle [a, b]	$\left(\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\right)$.u.A
	(C_f) et au dessus de (C_g) sur [a, c] (C_g) et au dessus de (C_f) sur [c, b]	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\, dx\right)$.u.A

• <u>Calcul de volume :</u>

Le volume de solide généré par la révolution autour de l'axe (ox) d'une portion de la courbe (C_f) comprise entre $(x = a)$ et $(x = b)$ est donné en unités de volumes par : $V = \left[\int_a^b \pi(f(x))^2\, dx\right]$u.v



Exemples d'applications

1

Déterminer la primitive sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en $x_0 = 1$ de la fonction

$$f : x \to -\frac{1}{x^2} + x + 3$$

<u>Rép :</u>

Nous conaissons une primitive de f sur $]0, +\infty[$; c'est la fonction $F : x \to \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x$.

Parmi toutes les primitives de f sur $]0, +\infty[$, celle qui s'annule en 1 et la fonction G telle que:

$$G : x \to \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x + k \text{ avec } G(1) = 0$$

Or : $G(1) = F(1) + k = \frac{9}{2} + k$, donc k est le réel tel que $\frac{9}{2} + k = 0$

d'où la primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est la fonction :

$$G : x \to \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

Scanné avec CamScanner

2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ par $x \to \frac{x}{(2x+1)^3}$

a - Trouver les réels a et b tel que pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$$

b - Déterminer une primitive de f sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Rép :

a - Pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{2ax + a + b}{(2x+1)^3} = \frac{x}{(2x+1)^3}$

Nous en déduisons que : $\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{-1}{2}$

donc, pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$: $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^3}\right)$

b - La fonction f est continue sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ car c'est une fonction rationnelle; elle admet donc une primitive sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Notons g la fonction $x \to 2x + 1$. Nous savons qu'une primitive sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de $\frac{g'}{g^2}$ est $-\frac{1}{g}$ et de $\frac{g'}{g^3}$ et $-\frac{1}{2g^2}$; nous vous laissons montrer qu'alors une primitive de f sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2x+1)^2}\right) = -\frac{4x}{8(2x+1)^2}.$$

3

Calculer les intégrales $I_1 = \int_0^{\pi} \cos t \, dt$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt$

Rép :

• Calcule de I_1

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

• Calcule de I2

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dx = \left[-\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

4

Calculer les intégrales

$$I_3 = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 4t + 1) dt \quad \text{et} \quad I_4 = \int_{-3}^3 (12t^{17} + 2t^3 - t) \, dt$$

Scanné avec CamScanner

Rép :

• Calcule de I_3

$$I_3 = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 4t + 1)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + t\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 2 + 1 = \frac{47}{12}$$

• Calcule de I_4

On remarque que la fonction $t \to 12t^{17} + 2t^3 - t$ est impaire donc

$$I_4 = \int_{-3}^{3} (12t^{17} + 2t^3 - t)\,dt = 0$$

5

1 - Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} \tan^2 u\,du$

2 - On considère la fonction $f : t \to \dfrac{\sin^3 t}{1 + \cos t}$

Calculer : $k = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} f(t)dt$ et $L = \int_0^{\pi/3} f(t)\,dt$

Rép :

1 - On a : $I = \int_0^{\pi/4}(1 + \tan^2 u)du - \int_0^{\pi/4} 1du = [\tan u]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

2 - Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ on peut écrire :

$$f(t) = \frac{\sin t \,.\, \sin^2 t}{1 + \cos t} = \frac{\sin t \,.\, (1 - \cos^2 t)}{1 + \cos t} = \sin t \,.\, (1 - \cos t) = \sin t - \sin t \cos t$$

donc $L = \int_0^{\pi/3} [\sin t + (-\sin t) \cos t]dt = \left[-\cos t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

et comme f est impair alors

$$K = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} f(t)\,dt = 0$$

6

Calculer à l'aide de l'integration par parties, les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x + 1}}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^2}}dt$$

Rép :

Calculons l'intégrale I

On va éffectuer une intégration par parties :

Posons

$$\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

d'où

$$I = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{3x+1}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{3x+1}\right]_0^1 - \frac{2}{9}\int_0^1 (3x+1)'(3x+1)^{1/2}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{3x+1}\right]_0^1 - \frac{2}{9}\left[\frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{3x+1} - \frac{4}{27}(\sqrt{3x+1})^3\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{32}{27}\right) - \left(0 - \frac{4}{27}\right) = \frac{8}{27}$$

Calculons l'intégrale J

On pose $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ v(t) = t^2 \end{cases}$ **donc** $\begin{cases} u(t) = \sqrt{1+t^2} \\ v'(t) = 2t \end{cases}$

De sorte que :

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \left[t^2\sqrt{1+t^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} 2t\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= \left[t^2\sqrt{1+t^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2)'((1+t^2)^{1/2}\,dt$$

$$= \left[t^2\sqrt{1+t^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(6 - \frac{16}{3}\right) - \left(0 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Fonctions Logarithmes

→ Fonction Logarithme népérien :

* **Définition** :

La primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note : Ln ou ln

→ Déduction et propriétés

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln x = \ln y \leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \leftrightarrow x > y$	
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \leftrightarrow x = e^y$	

Si n est un nombre pair alors : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln |x|$

→ Ensemble de définition :

La fonction f définie par	son ensemble de définition
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0, +\infty[$
$f(x) = \ln [u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$

→ Limites :

Fonctions Logarithmes

→ Fonction Logarithme népérien :

* Définition :

La primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note : Ln ou ln

→ Déduction et propriétés

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln x = \ln y \leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \leftrightarrow x > y$	
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \leftrightarrow x = e^y$	

Si n est un nombre pair alors : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln|x|$

→ Ensemble de définition :

La fonction f définie par	son ensemble de définition
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0, +\infty[$
$f(x) = \ln [u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$

→ Limites :

Scanné avec CamScanner

• **Limites essentielles :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(x \in \mathbb{N}^*)$

• **Déductions**

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \to \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \to \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \to \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \to \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \to \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \to \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Les limites restent valables en x_0^+ et en x_0^- ou en $+\infty$ ou en $-\infty$

→ Continuité :

- La fonction $x \to \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$
- Si u est une fonction continue et positive sur I alors la fonction $x \to \ln[u(x)]$ est continue sur I.

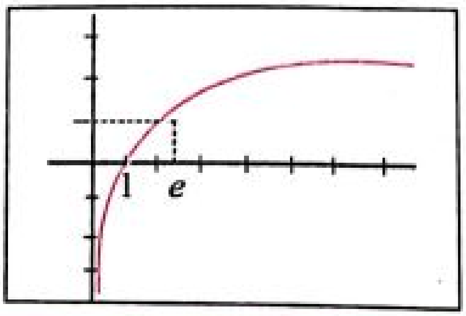
→ Dérivabilité :

La fonction $x \to \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I alors la fonction $x \to \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I\ (\ln[u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

→ Représentation graphique :



→ Signe de Ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Scanné avec CamScanner

→ Fonction logarithme de base a ℓog_a ; $a \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$

• Définition :

La fonction logarithme de base a est la fonction notée ℓog_a telle que $\forall x \in]0;+\infty[$ $\ell og_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

• Déduction et propriétés :

$\forall x \in]0;+\infty[$ $\forall y \in]0;+\infty[$ $\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell ng_a y$ $(r \in Q)$ $\ell og_a (x^r) = r\ell og_a x$ $\ell og_a \dfrac{1}{x} = -\ell og_a x$ $\ell og_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$	$\ell og_a 1 = 0$ $\ell og_a a = 1$ $\forall x \in]0;+\infty[$ $\forall r \in Q$ $\ell og_a x = r \leftrightarrow x = a^r$

→ Limites et inéquations :

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \leftrightarrow x < y$	$\ell og_a x > \ell og_a y \leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0+} \ell og_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0+} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$

→ Dérivé

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

• Cas particulier :

ℓog_{10} est appelée fonction logarithme décimale on le note ℓog.

Exemples d'application :

1

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \ell n(2x-1)$.

1 - Déterminer D_f.

2 - Calculer $f(1)$; $f\left(50+\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(5\sqrt{10}+\frac{1}{2}\right)$

3 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 1$

Scanné avec CamScanner

Rép :

1 - $x \in Df \leftrightarrow 2x - 1 > 0 \leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ d'où $Df = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2 - . $f(1) = \ell n(2(1) - 1) = \ell n(1) = 0$

. $f\left(50 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(2\left(50 + \frac{1}{2}\right) - 1\right) = \ln(100) = \ln(10)^2 = 2\ln 10$

. $f\left(5\sqrt{10} + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(2\left(5\sqrt{10} + \frac{1}{2}\right) - 1\right) = \ln\left(\left(10\sqrt{10} + 1\right) - 1\right)$

$= \ln(10^{3/2}) = \frac{3}{2}\ln 10$

3 - $f(x) = 1 \leftrightarrow \ln(2x - 1) = 1 \leftrightarrow 2x - 1 = e \leftrightarrow 2x = e + 1$

$\leftrightarrow x = \frac{e + 1}{2}$

2

Déterminer le domaine de définirion de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln(x - 2)$; $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$; $f(x) = \ln|x - 1|$; $f(x) = \sqrt{\ln x - 2}$

$f(x) = \frac{2\ln x - 4}{\ln x - 1}$; $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)$

Rép : * $f(x) = Ln(x - 2)$

$x \in Df \leftrightarrow x - 2 > 0 \leftrightarrow x > 2$ donc $Df =]2 + \infty[$

* $f(x) = Ln(x^2 - 3x)$

$x \in Df \leftrightarrow x^2 - 3x > 0 \leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

donc $Df =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)$

$x \in Df \leftrightarrow \frac{x + 2}{x - 1} > 0$ et $x - 1 \neq 0 \leftrightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$ et $x - 1 \neq 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x - 1)(x + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $Df =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

* $f(x) = \frac{2\ln x - 4}{\ln x - 1}$

$x \in Df \leftrightarrow x > 0$ et $\ln x - 1 \neq 0$ or $(\ln e = 1)$

donc $Df =]0, e[\cup]e, +\infty[$

* $f(x) = \sqrt{\ln x - 2}$

$x \in Df \leftrightarrow x > 0$ et $\ln x - 2 \geq 0$

$\ln x - 2 \geq 0 \rightarrow \ln x > 2 \rightarrow x \geq e^2$

donc $Df = [e^2, +\infty[$

* $f(x) = \ln|x - 1|$

$x \in Df \leftrightarrow x - 1 \neq 0 \leftrightarrow x \neq 1$

donc $Df =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

Scanné avec CamScanner

3 Calculer les limites aux bornes des fonctions de l'exemple 2

Rép : • $f(x) = \ln(x-2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x-2) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

• $f(x) = \ln(x^2-3x)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \ln(x^2-3x) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln(x^2-3x) = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-3x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x^2-3x) = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to 3^+} x^2-3x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2-3x) = +\infty$

• $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 0$; car $\lim\limits_{|x|\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ et $\ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to -2^-} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x+2}{x-1} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$

• $f(x) = \dfrac{2\ln x - 4}{\ln x - 1}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x\left(2 - \frac{4}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 - \frac{4}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{2\ln x - 4}{\ln x - 1} = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to e} 2\ln x - 4 = -2$ et $\lim\limits_{x\to e^-} \ln x - 1 = 0^-$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \frac{2\ln x - 4}{\ln x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln x - 4}{\ln x - 1} = \lim \frac{2 - \frac{4}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}} = 2$$

• $f(x) = \sqrt{\ln x - 2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\ln x - 2} = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - 2 = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to 1} |x-1| = 0^+$

Scanné avec CamScanner

4

Calculer f '(x) des fonctions suivantes :

$f(x) = x + \ln x$; $f(x) = \ln(x^2+3)$; $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

$f(x) = (1 - \ln x)^3$; $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$; $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2+1)}$

Rép :

- $f(x) = x + \ln x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $f'(x) = (x)' + (\ln x)' = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

- $f(x) = \ln(x^2+3)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = \dfrac{(x^2+3)'}{x^2+3} = \dfrac{2x}{x^2+3}$

- $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

f est dérivable sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$

et on a : $f'(x) = \dfrac{(\ln x + 1)'(\ln x - 1) - (\ln x - 1)'(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2}$

$$= \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$$

- $f(x) = (1 - \ln x)^3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $f'(x) = 3(1 - \ln x)^2 (1 - \ln x)'$

$$= 3(1 - \ln x)^2 . \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3(1 - \ln x)^2}{x}$$

- $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

f est dérivable sur $]e^{-2}, +\infty[$ et on a $f'(x) = \dfrac{(2 + \ln x)'}{2\sqrt{2 + \ln x}}$

donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 + \ln x}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{2 + \ln x}}$

- $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2+1)}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = \dfrac{-(\ln(x^2+1))'}{(\ln(x^2+1))^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)}{[\ln(x^2+1)]^2} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)[\ln(x^2+1)]^2}$

Scanné avec CamScanner

5

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \ln(x-1)$
et soit Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1 - Déterminer D_f.
2 - Calculer les limites aux bornes de D_f.
3 - Etudier les branches infinies de (C_f).
4 - Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5 - Déterminer l'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
6 - Déterminer l'équation de la tangente en $x_0 = 2$.
7 - Construire Cf.

Rép :

1 - $x \in Df \leftrightarrow x - 1 > 0$ donc $x > 1$ par conséquent $Df =]1, +\infty[$

2 - on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

3 - On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ donc (Cf) admet une asymptote verticale d'équation $(x = 1)$.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim \dfrac{\ln(x-1)}{x}$ (F - I)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = 0$$

donc (Cf) admet une branche parabolique de direction asymptotique $\overrightarrow{ox}$ ou voisinage de $+\infty$

4 - f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)'}{x-1} = \frac{1}{x-1} > 0$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Donc f est croissante sur $]1; +\infty[$

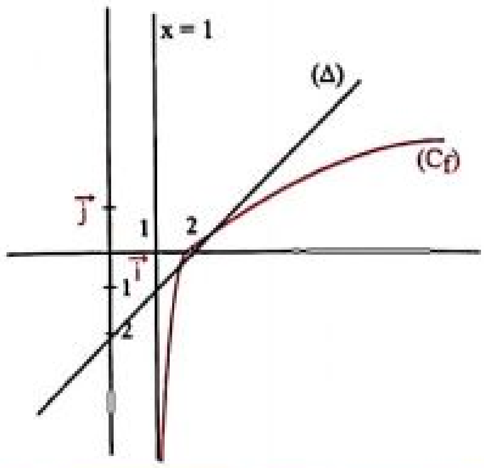
5 - On a $f(x) = 0 \leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \leftrightarrow x - 1 = 1 \leftarrow x = 2$

donc $Cf \cap (\overrightarrow{ox}) = \{(2, 0)\}$

6 - On a $y = f'(2)(x-2) + f(2) = x - 2$

donc la droite d'équation $y = x - 2$ est la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2.

7 - Construction de (C_f)



Scanné avec CamScanner

Fonction exponentielle

→ I - Fonction exponentielle népérienne :

• 1 - Définition :

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{*+}$

• 2 - Propriétés :

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

- $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x > 0$
- $y = e^x \leftrightarrow x = \ln(y)$ $(x \in \mathbb{R})$ $y \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln(e^x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ $e^{\ln x} = x$ $(x > 0)$
- $x > y \leftrightarrow e^x > e^y$
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$

• 3 - Domaine de définition :

La fonction f définie par	son ensemble de définition
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

• 4 - Limites de la fonction exponentielle népérienne :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$(n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = +\infty$

Ces limites restent valable en x_0 à droite ou x_0 à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$

5 - Continuité

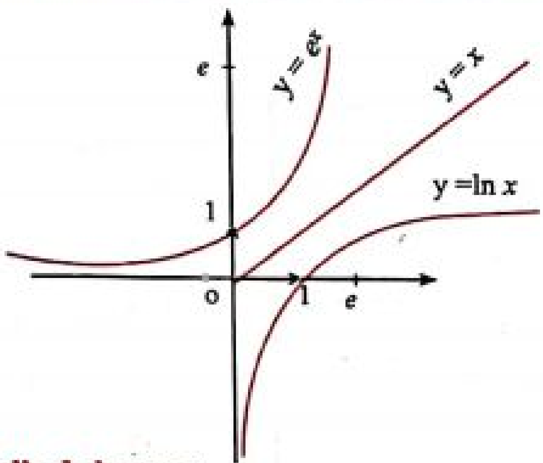
- La fonction $x \to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Si u est une fonction continue sur I alors la fonction $x \to e^{u(x)}$ est continue sur I.

6 - Dérivée de la fonction exponentielle

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; (e^x)' = e^x$$
$$(\forall x \in Du) \; ; \; (e^{u(x)})' = U'(x)\, e^{u(x)}$$

7 - Courbe de la fonction exponentielle :

Courbe de la fonctione exponentielle dans un repère orthonormé est le symétrique de la courbe de la fonction Ln par rapport à la droite d'équation : $y = x$ (1ère bissectrice).



→ II - Fonction exponentielle de base a :

1 - Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

La fonctione exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction ℓog_a sur $\mathbb{R}_+^*$

2 - Propriété :

$\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(r \in Q)$ $\quad (a^x)^r = a^{rx}$ $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\ell og_a\,(a^x) = x$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^{\ell og_a (x)} = x$
	$a^x = a^y \leftrightarrow x = y$
	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$ $a^x = y \leftrightarrow x = \ell og_a\,(y)$

Scanné avec CamScanner

• 3 - Limites et inéquations :

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x > a^y \leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

• 4 - Dérivée

$$\boxed{(a^x)' = (\ln a) \times a^x}$$

Exemples d'aplications

1 Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^{\ln(3)}$; 2) $e^{-\ln(2)}$

3) $e^{\frac{1}{2}\ln(8)}$; 4) $e^{-\frac{1}{4}\ln(2)}$

Rép :

On simplifie les expressions suivantes :

Rappel :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $e^{\ln x} = x$; $\ell n(x^r) = r\,\ell nx$

1) $e^{\ln(3)} = 3$

2) $e^{-\ln(2)} = e^{+\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\ -\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

3) $e^{\frac{1}{2}\ln(8)} = e^{\ln(\sqrt{8})} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

4) $e^{-\frac{1}{4}\ln(2)} = e^{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

2 Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^{2\ln(3)}$; 2) $e^{1+\ln(2)}$

3) $e^{3-\ln(2)}$; 4) $e^{\frac{1}{2}+\ln(4)}$

Rép :

On simplifie les expressions demandées :

1) $e^{2\ln(3)} = e^{\ln(3^2)} = 3^2 = 9$

2) $e^{1+\ln(2)} = e \cdot e^{\ln(2)} = 2e$

3) $e^{3-\ln(2)} = e^3 \cdot e^{-\ln(2)}$

$= e^3 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^3}{2}$

4) $e^{\frac{1}{2}+\ln(4)} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\ln(4)}$

$= 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$

3 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\ln(e^3)$; 2) $\ln(\sqrt{e})$

3) $\ln(\ln e)$; 4) $\ln\left(\frac{1}{2}e^2\right)$

Rép :

On simplifie les expressions demandées :

1) $\ln(e^3) = 3$

$[(\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ln e^x = x)]$

2) $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2}$

3) $\ln(\ln e) = \ln(1) = 0$

4) $\ln\left(\frac{1}{2}e^2\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln(e^2)$

$= -\ln(2) + 2$

4

Soit x un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

1) $e^x \cdot e^{-2x}$; 2) $e^{3x} \cdot e^{-3x+1}$

3) $e^{1-x} \cdot e^{2x+3}$; 4) $(e^{-x} \cdot (e^x)^{-3}$

Rép :

On simplifie les expressions suivantes :

1) $e^x \cdot e^{-2x} = e^{x-2x} = e^{-x}$

2) $e^{3x} \cdot e^{-3x+1} = e^{3x-3x+1} = e^1 = e$

(car $\forall x,y \in \mathbb{R}$; $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$)

3) $e^{1-x} \cdot e^{2x+3} = e^{1-x+2x+3}$

$= e^{x+4}$

4) $(e^{-x} \cdot (e^x)^{-3} = e^{-x} \cdot e^{-3x} = e^{-4x}$

(car $\forall x,y \in \mathbb{R}$; $(e^x)^y = e^{xy}$)

5

Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^{\frac{1}{2}\ln 9} + e^{\ln 5}$; 2) $e^{-\ln\left(\frac{5}{6}\right)} + e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$

3) $\frac{\sqrt{e^3}}{\sqrt[3]{e}}$; 4) $\frac{e(x+1)^2}{e(x-1)^2}$

5) $\frac{e^{\ln 3 - \ln 2}}{e^{\ln 3 + \ln 2}}$; 6) $\frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{2x} + e^x}$

Rép :

On simplifie les expressions demandées :

1) $e^{\frac{1}{2}\ln 9} + e^{\ln 5} = e^{\ln\sqrt{9}} + 5$

$= e^{\ln 3} + 5 = 3 + 5 = 8$

2) $e^{-\ln\left(\frac{5}{6}\right)} + e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = e^{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} + \frac{1}{5}$

$= \frac{6}{5} + \frac{1}{5} + \frac{7}{5}$

3) $\frac{\sqrt{e^3}}{\sqrt[3]{e}} = \frac{(e^3)^{1/2}}{e^{1/3}} = e^{3/2 - 1/3} = e^{7/6}$

4) $\frac{e^{(x+1)2}}{e^{(x-1)2}} = e^{(x-1)^2 - (x-1)^2} = e^{4x}$

5) $\frac{e^{\ln 3 - \ln 2}}{e^{\ln 3 + \ln 2}} = e^{\ln 3 - \ln 2 - \ln 3 - \ln 2}$

$= e^{-2\ln 2} = e^{\ln\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

6) $\frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{2x} + e^x} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1}{(e^x)^2 + e^x}$

$= \frac{(e^x + 1)^2}{e^x(e^x + 1)} = \frac{e^x + 1}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 1 + e^{-x}$

6

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\ln\sqrt{e^6} - \ln\sqrt{e^4}$; 2) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

3) $\ln\sqrt{e^{-\ln(e8)}}$; 4) $(e^x)^7 \cdot (e^{-3x})^2$

5) $\frac{e^{4x+5}}{e^{4x-3}}$; 6) $\frac{e^{3x} + e^{-2x}}{e^{-x}}$

7) $\frac{e^{2x}\sqrt{e^{x+2}}}{e^{1,2x}\sqrt[6]{e^{2x}}}$; 8) $\sqrt[3]{e^{4x}} \cdot (\sqrt[6]{e^x})^2$

Rép :

On simplifie les expressions demandées :

1) $\ln\sqrt{e^6} - \ln\sqrt{e^4} = \ln(e^6)^{½} - \ln(e^4)^{½}$

$= \ln(e^{6/2}) - \ln(e^{4/2})$

$= e^3 - e^2$

2) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = \ln(e^{-3}) = -3$

3) $\ln\sqrt{e^{-\ln(e8)}} = \frac{1}{2}\ln\left(e^{\ln\left|\frac{1}{e^8}\right|}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e^8}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^{-8}) = \frac{-8}{2} = -4$

4) $(e^x)^7 \cdot (e^{-3x})^2 = e^{7x} \cdot e^{-6x} = e^x$

5) $\frac{e^{4x+5}}{e^{4x-3}} = e^{4x+5-4x+3} = e^8$

Scanné avec CamScanner

6) $\dfrac{e^{3x}+e^{-2x}}{e^{-x}}=\dfrac{e^{3x}}{e^{-x}}+\dfrac{e^{-2x}}{e^{-x}}$

$=e^{3x+x}+e^{-2x+x}=e^{4x}+e^{-x}$

7) $\dfrac{e^{2x}\sqrt{e^{x+2}}}{e^{1,2x}\sqrt[6]{e^{2x}}}=\dfrac{e^{2x}(e^{x+2})^{1/2}}{e^{1,2x}(e^{2x})^{1/6}}$

$=\dfrac{e^{2x}.e^{\frac{x+2}{2}}}{e^{1,2x}.e^{\frac{x}{3}}}=\dfrac{e^{2x+\frac{x+2}{2}}}{e^{1,2x+\frac{x}{3}}}$

$=e^{\left(2x+\frac{x+2}{2}-1,2x-\frac{x}{3}\right)}$

$=e^{\frac{12x+3x+6-7,2x-2x}{6}}=e^{5,8x+6}$

8) $\sqrt[3]{e^{4x}}.(\sqrt[6]{e^{x}})^2=(e^{4x})^{1/3}.\sqrt[3]{e^{x}}$

$=e^{\frac{4x}{3}}.e^{\frac{x}{3}}=e^{\frac{4x}{3}+\frac{x}{3}}=e^{\frac{5x}{3}}$

$\left(\text{car } \sqrt[n.m]{e^{m}}=\sqrt[n]{x}\right)$

7

Résoudre les équations suivantes :

1) $e^{x}=2$; 2) $e^{x}=\dfrac{1}{3}$

3) $e^{x}=\dfrac{-3}{2}$; 4) $e^{x}=\sqrt{2}$

<u>Rép :</u>

<u>Rappel</u> : $\begin{cases} e^{x}=y \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{matrix} x=\ln y \\ y\in\mathbb{R}^{*+}\end{matrix}$

1) $e^{x}=2 \leftrightarrow x=\ln(2)$

ainsi $S=\{\ln(2)\}$

2) $e^{x}=\dfrac{1}{3} \leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$\leftrightarrow x=-\ln 3$

ainsi $S=\{-\ln 3\}$

3) $e^{x}=\dfrac{-3}{2}$

(impossible car : $\forall x\in\mathbb{R}$; $e^{x}>0$)

donc : $S=\phi$

4) $e^{x}=\sqrt{2} \leftrightarrow x=\ln\sqrt{2}$

$\leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln 2$

$S=\left\{\dfrac{\ln 2}{2}\right\}$

8

Résoudre les équations suivantes :

1) $e^{x-2}=1$; 2) $e^{3x+1}=e^{-x+3}$

3) $e^{x2+1}=e^{2x}$; 4) $3^{x}=4$

<u>Rép :</u>

<u>Rappel</u> : $\forall x,y\in\mathbb{R} : e^{x}=e^{y} \leftrightarrow x=y$

1) $e^{x-2}=1 \leftrightarrow x-2=\ln(1)$

$\leftrightarrow x-2=0$

$\leftrightarrow x=2$

$\leftrightarrow S=\{2\}$

2) $e^{3x+1}=e^{-x+3} \leftrightarrow 3x+1=-x+3$

$\leftrightarrow 4x=2$

$\leftrightarrow x=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

donc $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $e^{x^2+1}=e^{2x} \leftrightarrow x^2+1=2x$

$\leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\leftrightarrow x=1$

donc $S=\{1\}$

4) $3^{x}=4 \leftrightarrow \ln(3^{x})=\ln 4$

$\leftrightarrow x\ln 3=2\ln 2$

$\leftrightarrow x=2.\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

d'où $S=\left\{2.\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$

9

Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-3}}=e$; 2) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-2}}=\dfrac{1}{e}$

3) $e^{\frac{2x+3}{x-2}}=\dfrac{1}{e}$; 4) $\dfrac{\sqrt{e^{x}}}{e^{x-1}}=e^{2}$

Rép :

Résolution des équations demandées :

1) $\frac{e^{2x+3}}{e^{x-3}} = e \leftrightarrow e^{2x+3-x+3} = e$

$\leftrightarrow e^{x+6} = e$

$\leftrightarrow x+6 = 1$

$\leftrightarrow x = -5$

Ainsi $S = \{-5\}$

(car $e^x = e^y \leftrightarrow x = y$ et $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$)

2) $\frac{e^{2x+3}}{e^{x-2}} = \frac{1}{e} \leftrightarrow e^{2x+3-x+2} = e^{-1}$

$\leftrightarrow e^{x+5} = e^{-1}$

$\leftrightarrow x+5 = -1$

$\leftrightarrow x = -6$

D'où : $S = \{-6\}$

3) $e^{\frac{2x+3}{x-2}} = \frac{1}{e}$; $(x \neq 2)$

$\leftrightarrow e^{\frac{2x+3}{x-2}} = e^{-1}$; $x \neq 2$

$\leftrightarrow \frac{2x+3}{x-2} = -1$; $x \neq 2$

$\leftrightarrow 2x+3 = -(x-2)$; $x \neq 2$

$\leftrightarrow 3x = -1$; $x \neq 2$

$\leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

4) $\frac{\sqrt{e^x}}{e^{x-1}} = e^2 \leftrightarrow \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x-1}} = e^2$

$\leftrightarrow e^{\frac{x}{2}-x+1} = e^2 \leftrightarrow \frac{x}{2} - x + 1 = 2$

$\leftrightarrow -\frac{x}{2} = 1 \leftrightarrow x = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}}$; 2) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

3) $\frac{e^x+1}{e^x-4} = \frac{1}{2}$; 4) $\frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x+4}}} = e^{-x}$

Rép :

Résolution des équations suivantes :

1) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$

$\frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}} \leftrightarrow e^{2x} \cdot e^{-x} = e^x + 1$

$\leftrightarrow e^{2x-x} = e^x + 1 \leftrightarrow e^x - e^x = 1$

$\leftrightarrow 0x = 1$ impossible

Donc : $S = \emptyset$

2) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x}$

$\leftrightarrow -2e^{-x} = 0$

$\leftrightarrow 2e^{-x} = 0$ impossible

(car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

Donc : $S = \emptyset$

3) $\frac{e^x+1}{e^x-4} = \frac{1}{2}$

Soit D l'ensemble de définition d'équation :

$x \in D \leftrightarrow e^x - 4 \neq 0$

On résoudre l'équation dans l'ensemble de définition D :

$\leftrightarrow e^x \neq 4 \leftrightarrow x \neq \ln 4$

$\leftrightarrow x \neq 2\ln 2$

$D = \mathbb{R} - \{2\ln 2\}$

$\frac{e^x+1}{e^x-4} = \frac{1}{2}$

$\leftrightarrow 2(e^x+1) = e^x - 4$

$\leftrightarrow 2e^x - e^x = -6$

$\leftrightarrow e^x = -6$ impossible

Donc : $S = \emptyset$

4) $\frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x+4}}} = e^{-x}$

$\leftrightarrow \frac{e^{2x-1}}{(e^{2x}+4)^{1/2}} = e^{-x} \leftrightarrow \frac{e^{2x-1}}{e^{x+2}} = e^{-x}$

$\leftrightarrow e^{2x-1-x-2} = e^{-x} \leftrightarrow 2x-1-x-2 = -x$

$\leftrightarrow x = 3/2$

Ainsi : $S : \{3/2\}$

Scanné avec CamScanner

11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x - 2 + e^{-x}$

Et (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$; $\|\vec{i}\| = 2$cm

1- a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b- Vérifier que $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x e^{x}}\right)$

pour $x \in \mathbb{R}^*$ en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2 - Donner le tableau de variations de f.

3 -a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x + 2$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b- Soit (D) la droite d'équation $y = x - 2$

- Etudier la position relative de la droite (D) et la courbe (Cf).

c- Tracer (Cf) et (D).

4 - Déterminer les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Rép :

1- a- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 2 + e^{-x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x - 2 + \frac{1}{e^{x}}$$
$$= +\infty$$

$\left(\text{car } \lim\limits_{+\infty} x - 2 = +\infty \;;\; \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0\right)$

b- On vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x e^{x}}\right)$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = x - 2 + e^{-x}$

$$= x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$
$$= x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x e^{x}}\right)$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x e^{x}}\right)$

Déduction de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^{x}}\right) = +\infty$$

$\left(\text{car } \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0^- \leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^{x}} = -\infty$

2 - Tableau de variations de f :

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x - 2 + e^{-x})'$

$$= 1 - e^{-x}$$

Donc : $f'(x) \geq 0 \leftrightarrow 1 - e^{-x} \geq 0$

$\leftrightarrow e^{-x} \leq 1$

$\leftrightarrow -x \leq 0 \leftrightarrow x \geq 0$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3 - a- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x + 2$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x + 2) = \lim_{x \to +\infty} (x - 2 + e^{-x} - x + 2)$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$$

- Interprétation graphique de résultat :

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$

Alors la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $+\infty$

b - Etudier la position relative de la droite (D) et la courbe (Cf) : $f(x) - y = f(x) - (x - 2)$

$$= e^{-x} \geq 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - (x - 2) > 0$

D'où (Cf) est au dessus de (D).

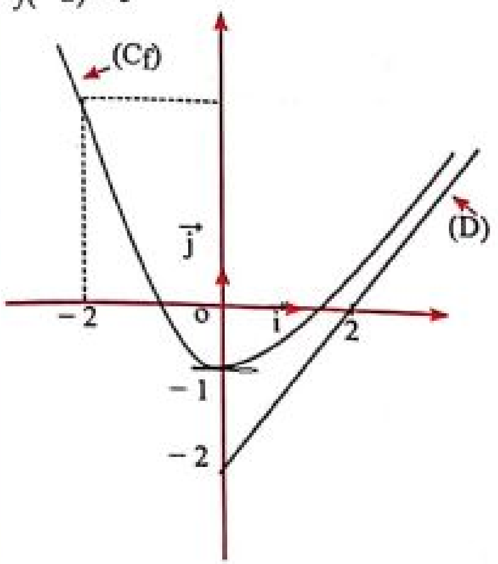
c- Construction de (Cf) et (D)

On a d'abord : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Donc (Cf) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$f(-1) \approx -0{,}3$

$f(-2) \approx 3$



4 - Déterminer les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = x - 2 + e^{-x}$

Donc : $F(x) = \frac{x^2}{x} - 2x - e^{-x} + c$

(Tq : $c \in \mathbb{R}$)

12

I - Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - xe^{-x}$$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$

II - En considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x(e^{-x} + 1) + e^{-x}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = g(x)$ puis donner le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.

5) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

6) Prouver que (C) admet un point d'inflexion.

7) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse O.

8) Tracer (C) et (Δ) et (T).

Rép :

1) Variation de la fonction g :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = (1 - xe^{-x})'$

$= -e^{-x} + xe^{-x}$

$= (x - 1)e^{-x}$

Donc : $g'(x) \geq 0 \leftrightarrow (x - 1)e^{-x} \geq 0$

$\leftrightarrow x - 1 \geq 0$

$\leftrightarrow x \geq 1$

Donc g est décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

2) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) > 0$

On a le tableau suivant de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$\frac{e-1}{e}$	↗

Donc d'après le tableau de variation de g; on a $\frac{e-1}{e}$ est un minum de g sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq \frac{e-1}{e} > 0$

Puisque $\frac{e-1}{e} > 0$

II - 1) Calculons les limites

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{-x} + 1) + e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} + x + e^{-x}$

Scanné avec CamScanner

$$= \lim_{x \to -\infty} (x+1)e^{-x} + x$$

$$= -\infty$$

$\left(\text{car } \lim_{x \to -\infty} x+1 = -\infty \; ; \; \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty\right)$

$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(e^{-x}+1) + e^{-x}$

$$= +\infty$$

$\left(\text{car } \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0\right)$

2) Montrons que $f'(x) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (x(e^{-x}+1) + e^{-x})'$$

$$= (e^{-x}+1) - xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= 1 - xe^{-x} = g(x)$$

Or $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) > 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) > 0$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Montrons que (Δ) est une asymptote oblique de (C) au $+\infty$.

On a : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} x(e^{-x}+1) + e^{-x} - x$

$$= \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} + e^{-x} + x - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$$

$\left(\text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0\right)$

D'où la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) au $+\infty$

5) Etudions la branche infinie de (C) au $-\infty$

On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)e^{-x} + x}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x} + 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot e^{-x} + 1$$

$$= +\infty$$

$\left(\begin{array}{l} \text{car } \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right)$

Donc (C) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au $-\infty$

6) Etudions la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

On a : $f(x) - y = x(e^{-x}+1) + e^{-x} - x$

$$= (x+1)\, e^{-x}$$

Donc ; puisque $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{-x} > 0$

Alors le signe de $(f(x) - x)$ est le signe de $x+1$

D'où la position relative de (C) et (Δ) est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$
la position relative de (C) et (Δ)	(C) au dessous de (Δ)	(C) secante à (Δ) en $(-1, -1)$	(C) au dessus de (Δ)

6) Montrons que (C) admet un point d'inflexion :

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = g(x)$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = g'(x)$

Donc on a :

x	$-\infty$	$+1$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

D'où le point $I\left(1, \frac{2+e}{e}\right)$ est un point d'inflexion.

7) Equation de la tangente (T) à (C) au point

d'abscisse O :

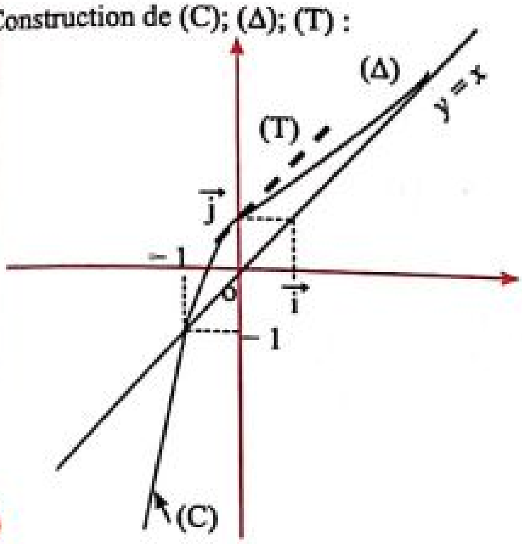
On a l'équation de (T)

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = 1.(x - 0) + 1$

$(T) : y = x + 1$

8) Construction de (C); (Δ); (T) :



13

1 - Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

2 - En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

3 - Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \ln(1 + e^x)$

a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b - En déduire à l'aide d'intégration par parties l'intégrale : $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx$

Rép :

1 - Montrons $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

2 - On en déduit l'intégrale I :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^x - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^x - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\right)dx = \left[e^x - \ln(1+e^x)\right]_0^1$$

$$= [e - \ln(1+e)) - (1 - \ln(2))$$

$$= e - 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

3 - a- Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \ln(1+e^x)$

D'où : $f'(x) = \dfrac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

b- Calculons l'intégrale J :

On intègre par parties avec :

$\begin{cases} u(x) = \ln(1+e^x) \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \\ v(x) = e^x \end{cases}$

D'où : $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx$

$$J = \left[e^x \ln(1+e^x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$$

$$J = \left[e^x \ln(1+e^x)\right]_0^1 - I$$

$$= e\ln(1+e) - \ln(2) - e + 1 - \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

$$= (e+1)\ln(1+e) - 2\ln(2) - e + 1$$

14

I- Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = e^x - x - 1$

1) Etudier les variations de la fonction g.

2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g(x) > 0$

II- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{2x} - 2x\,e^x - 1$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Déterminer les branches infinies de (C).

3) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = 2g(x).\, e^x$ et donner le tableau de variation de f.

4) Tracer (C).

5) Soit t un réel négatif. Calculer en fonction de t l'aire A(t) du domaine plan limité par (C), l'axe d'abscisses et les droites d'équations x = t; x = 0 puis déterminer $\lim_{t\to-\infty} A(t)$

Rép :

1- Variations de la fonction g :

$g'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$

Donc $e^x - 1 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 0$

D'où tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2) On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g(x) > 0$

On a d'après le tableau de variation de g ; 0 est minimum de g sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) \geq 0$

Or : $g(0) = 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g(x) > 0$

II- 1) Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - 2xe^x - 1 = -1$

$\left(\text{car } \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \;;\; \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\right)$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - 2xe^x - 1$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$

$\left(\text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0 \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0\right)$

2) Les branches infinies de (C) :

On a d'une part : $\lim_{-\infty} f(x) = -1$

Alors la droite d'équation y = − 1 est une asymptote de (C) au voisinage de $-\infty$.

D'autre part on a : $\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$

Calculons : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

En effet

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x}\left(1 - 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$

$\left(\text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty \;;\; \lim_{+\infty}\left(1 - 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}\right) = 1\right)$

D'où (C) admet branche parabolique à la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = 2g(x).\, e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = (e^{2x} - 2xe^x - 1)'$

$= (e^{2x})' - (2xe^x)' - (1)'$

$= 2e^{2x} - 2(e^x + xe^x)$

$= 2e^x\,(e^x - (1 + x))$

$= 2e^x\,(e^x - 1 - x) = 2e^x.\, g(x)$

Tableau de variation de f :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^x.\, g(x)$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$; $g(x) \geq 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \geq 0$

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

De sorte que le tableau de variation de f :

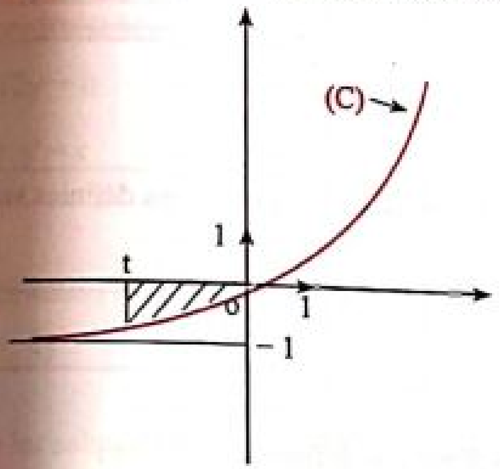
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

Scanné avec CamScanner

4) Construction de (C) :

On a f ' s'annulle sans changer de signe au point O.

Donc le point O(0,0) est un point d'inflection de (C).



Calculons l'aire A(t) :

$$A(t) = \int_t^0 \left|f(x)\right| dx \quad (u.a)$$

Or : $\forall x \in [t; 0]$; $f(x) \leq 0$

Donc : $\forall x \in [t; 0]$; $\left|f(x)\right| = -f(x)$

D'où : $A(t) = \int_t^0 -f(x)\, dx \quad (u.a)$

$$= -\int_t^0 (e^{2x} - 2xe^x - 1)dx \ (u.a)$$

$$= -\left(\int_t^0 e^{2x}\, dx - 2\int_t^0 xe^x\, dx - \int_t^0 1dx\right)(u.a)$$

$$= \left(-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_t^0 + 2I + [x]_t^0\right)(u.a)$$

On va effectuer une intégration par parties pour calculer $I = \int_t^0 xe^x\, dx$

En effet ; posons :

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

D'où $I = [xe^x]_t^0 - \int_t^0 e^x\, dx$

$$= [xe^x - e^x]_t^0$$

$$= [(x-1)e^x]_t^0$$

Donc : $A(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 2(x-1)e^x + x\right]_t^0 (ua)$

$$= \left(-\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}e^{2t} - 2(t-1)e^t - t\right)(ua)$$

$$= \left(\frac{-5}{2} - t + \frac{1}{2}e^{2t} - 2(t-1)e^t\right)(ua)$$

Calculons $\lim_{t \to -\infty} A(t)$:

$$\lim_{t \to -\infty} A(t)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} -\frac{5}{2} - t + \frac{1}{2}e^{2t} - 2(t-1)e^t$$

$$= \lim_{t \to -\infty} -\frac{5}{2} - t + \frac{1}{2}e^{2t} - 2te^t + 2e^t$$

$$= +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \to -\infty} e^{2t} = 0 \\ \lim_{t \to -\infty} te^t = 0 \\ \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \\ \lim_{t \to -\infty} -\frac{5}{2} - t = +\infty \end{array} \right\}$$

Equations différentielles

1 - L'équation différentielle $y' = ay + b$:

- Propriété 1 :

Soit a un réel. Alors les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $(k \in \mathbb{R})$; $x \to ke^{ax}$

- Propriété 2 :

Soient a et b deux réels non nuls.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \to ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ tel que } k \in \mathbb{R}$$

- Propriété 3 :

Pour tout réel x_0 et y_0 ; l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ admet une solution f et une seule telles que : $f(x_0) = y_0$

2 - Equation différentielle du second ordre à cœfficients constants $y'' + ay' + by = 0$:

- Propriété 1 :

Soit l'équation différentielle du second ordre à cœfficients constants (E) : $y'' + ay' + by = 0$ tel que a,b deux réels

On forme l'équation du second degré sur C appelée équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$

1- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ; alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \to Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ avec $A,B \in \mathbb{R}^2$

2- Si l'équation caractéristique admet une racine réelles double r_0, alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \to (Ax + B)e^{r_0x}$ avec $A,B \in \mathbb{R}^2$

3- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \to (A\cos qx + B\sin qx)e^{px} \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}^2$$

Remarque :

Soit l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ou ω est un nombre réel $(\omega \neq 0)$

Les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \to A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ ou A et B sont des constantes réelles.

Scanné avec CamScanner

Exemples d'applications

1

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $2y' = 0$; 2) $y' = 3$

3) $y' = x$; 4) $2y' = \frac{1}{x}$

Rép :

1) Résolution d'équation $2y' = 0$

$$2y' = 0 \leftrightarrow y' = 0$$
$$\leftrightarrow y = k$$

Donc les solutions d'équation différentielle $2y' = 0$ sont les fonctions définies par $x \to k \,/\, k \in \mathbb{R}$.

2) Résolution d'équation différentielle $y' = 3$

$$y' = 3 \leftrightarrow y = 3x + k$$

Donc les solutions d'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to 3x + k \,/\, k \in \mathbb{R}$

2) Résolution d'équation différentielle $y' = x$

$$y' = x$$
$$\leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + k \,/\, k \in \mathbb{R}$$

Donc les solutions d'équation différentielle $y' = x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \to \frac{x^2}{2} + k \,/\, k \in \mathbb{R}$

4) Résolution d'équation différentielle $2y' = \frac{1}{x}$

$$2y' = \frac{1}{x} \leftrightarrow y' = \frac{1}{2x}$$
$$\leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln|x| + k$$

Donc les solutions d'équation différentielle $2y' = \frac{1}{x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$x = \frac{1}{2}\ln|x| + k \,/\, k \in \mathbb{R}$

2

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $y' + 5y = 0$; 2) $2y' + y = 0$

3) $y' = 7y - 3$; 4) $4y - 5y' = 7$

Rép :

Résolution d'équation différentielle :

1) $y' + 5y = 0$

$$y' + 5y = 0 \leftrightarrow y' = -5y$$

Donc les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $x \to ke^{-5x} \,/\, k \in \mathbb{R}$

2) $2y' + y = 0$

$$2y' + y = 0 \leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$$

Donc les solutions d'équation différentielle $2y' + y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$par :

$x \to ke^{-\frac{1}{2}x} \,/\, k \in \mathbb{R}$

3) $y' = 7y - 3$

Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \to ke^{7x} + \frac{3}{7} \,/\, k \in \mathbb{R}$

4) $4y - 5y' = 7$

$$4y - 5y' = 7 \leftrightarrow 5y' = +4y - 7$$
$$\leftrightarrow y' = \frac{4}{5}y - \frac{7}{5}$$

D'où les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \to ke^{\frac{4}{5}x} + \frac{7}{4}$

3

Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer pour chaque équation la solution particulière f qui vérifie la condition : $f(x_0) = y_0$

1) $y_0 = 2$ et $x_0 = 1$; $2y' + y - 1 = 0$

2) $y_0 = -5$ et $x_0 = 0$; $y' + y = 3$

3) $y_0 = e$ et $x_0 = e$; $\ln(2)y' + \ln(3)y = \ln(4)$

4) $y_0 = 1$ et $x_0 = 1$; $y' + 2y = 0$

Rép :

On détermine f dans chaque cas :

1) $2y' + y - 1 = 0$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$

On a : $2y' + y - 1 = 0 \leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

D'où les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \to ke^{-\frac{1}{2}x} + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Cherchons la solution particulière f qui vérifie $f(1) = 2$

On a f est solutionde l'équation $2y' + y - 1 = 0$

Donc f s'écrit sous la forme :

$$\exists\, k \in \mathbb{R} ;\ f(x) \to ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

Or : $f(1) = 2 \leftrightarrow ke^{-\frac{1}{2}x} + 1 = 2$

$$\leftrightarrow ke^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\leftrightarrow k = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Donc $f(x) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(-x-1)} + 1$$

2) $y' + y = 3 ;\ x_0 = 0,\ y_0 = -5$

$y' + y = 3 \leftrightarrow y' = -y + 3$

Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $x \to ke^{-x} + 3$

Cherchons la solution f tels que $f(0) = -5$

On a f est une solution de l'équation $y' + y = 3$

Donc f s'écrit sous la forme

$$\exists\, k \in \mathbb{R} ;\ f(x) \to ke^{-x} + 3$$

Or $f(0) = -5 \leftrightarrow k + 3 = -5$

$$\leftrightarrow k = -8$$

Donc : $\boxed{f(x) = -8e^{-x} + 3}$

3) $\ln 2y' + \ln 3y = \ln 4 ;\ x_0 = e ;\ y_0 = e$

$\ln(2)y' + \ln(3)y = \ln(4)$

$y_0 = e \quad x_0 = e$

$\ln(2)y' + \ln(3)y = \ln(4)$

$$\leftrightarrow y' = -\frac{\ln(3)}{\ln(2)}y + \frac{\ln(4)}{\ln(2)}$$

$$\leftrightarrow y' = -\frac{\ln(3)}{\ln(2)}y + 2$$

Donc les solutions d'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \to ke^{-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}x} + \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}$$

Déterminons la solution particulière f qui vérifie : $f(e) = e$

On a f est solution d'équation (E).

Donc f sous la forme.

$$\exists\, k \in \mathbb{R} ;\ f(x) = ke^{-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}x} + \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}$$

Puisque : $f(e) = e$

$$f(e) = e \leftrightarrow ke^{-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}e} + \frac{2\ln(2)}{\ln(3)} = e$$

$$\leftrightarrow k = \left(e - \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}\right)e^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$$

De sorte que :

$$f(x) = \left(e - \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}\right)e^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} \cdot e^{\frac{-\ln(3)}{\ln(2)}x} + 2\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

$$\boxed{f(x) = \left(e - \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}\right)e^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}(1-x)} + 2\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$$

4) $y' + 2y = 0 ;\ x_0 = 1 ;\ y_0 = 1$

$y' + 2y = 0 \leftrightarrow y' = -2y$

Donc les solutions de l'équation $y' + 2y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \to ke^{-2x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminons f tels que $f(1) = 1$

On a f solutions d'équation différentielle $y' + 2y = 0$

Alors $\exists\, k \in \mathbb{R} ;\ f(x) = ke^{-2x}$

Comme $f(1) = 1$

$$\leftrightarrow ke^{-2} = 1$$

$$\leftrightarrow k = e^2$$

Donc : $f(x) = e^2 \cdot e^{-2x}$

$$f(x) = e^{2(1-x)}$$

4

Soit la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$, et (C) sa courbe représentative.

- Déterminer la fonction f sachant que :

$$f'(x) = 2f(x) + 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

et la courbe (C) passe par le point A(0,1)

Rép :

Déterminons la fonction f :

On a f vérifie : $f'(x) = 2f(x) + 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Donc f est solution d'équation différentielle

$$\text{(E)} : y' = 2y + 1$$

Scanné avec CamScanner

Or la solution de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \to ke^{2x} - \frac{1}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Donc $\exists\, k \in \mathbb{R}$; $f(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$

D'autre part on a : $A \in (C) \leftrightarrow f(0) = 1$

$$\leftrightarrow k - \frac{1}{2} = 1 \leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

D'où : $f(x) = \frac{3}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}$

5

> Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et (C) sa courbe représentative.
> - Déterminer la fonction f telle que :
> 1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + 3f'(x) = 2$
> 2) La courbe (C) admet au point d'abscisse-1, une tangente de cœfficient directeur $\frac{1}{3}$

Rép :

On a $f(x) + 3f'(x) = 2$

Donc f est une solution d'équation différentielle (E): $3y' + y = 2$

$$3y' + y = 2 \leftrightarrow y' = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$

Donc les solutions se l'équation (E) sont les fonctions : $x \to ke^{-\frac{1}{3}x} + 2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Puisque f solution de l'équation (E)

Alors : $(\exists\, k \in \mathbb{R})$; $f(x) = ke^{-\frac{1}{3}x} + 2$

Comme la pente de la tangente au point d'abscisse -1 au courbe (C) est $\frac{1}{3}$

Alors : $f'(-1) = \frac{1}{3}$

Puisque : $f'(x) = -\frac{1}{3}ke^{-\frac{1}{3}x}$

Donc : $f'(-1) = \frac{1}{3} \leftrightarrow -\frac{1}{3}ke^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

$$\leftrightarrow k\sqrt[3]{e} = -1$$

$$\leftrightarrow k = -1\, e^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = -1\, e^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{3}x} + 2$$

D'où : $f(x) = -e^{\frac{1}{3}(-1+x)} + 2$

6

> Résoudre les équations différentielles suivantes:
> 1) $y'' - 3y = 0$; 2) $y'' + y' = 0$
> 3) $3y' + y = 0$; 4) $-y'' + 5y' = 0$

Rép :

Résolution d'équation : $y'' - 3y = 0$

$$(E) : y'' - 3y = 0$$

L'équation caractéristique de (E) est :

$$r^2 - 3 = 0 \leftrightarrow r = \sqrt{3} \text{ ou } r = -\sqrt{3}$$

Par la suite, les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \to Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}$

avec $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$

2) Résolution d'équation $y'' + y' = 0$

On a (E) : $y'' + y' = 0$

L'équation caractéristique de (E) est :

$$r^2 + r = 0 \leftrightarrow r(r+1) = 0$$

$$\leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = -1$$

D'où les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $x \to A + Be^{-x}$ $(A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R})$

3) Résolution d'équation : $3y'' + y = 0$

$$(E) : 3y'' + y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$3r^2 + 1 = 0 \leftrightarrow r^2 = -\frac{1}{3}$$

$$\leftrightarrow r = i\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ou } r = -i\sqrt{\frac{1}{3}} \left(p = 0 \text{ et } q = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\leftrightarrow r = i\,\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } r = -i\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Par la suite, les solutions d'équation différentielle (E) sont les fonctions.

$$x \to A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)$$

3) Résolution d'équation : $-y'' + 5y' = 0$

$$(E) : -y'' + 5y' = 0$$

L'équation caractéristique de l'équation (E) est :

$$-r^2 + 5r = 0 \leftrightarrow r(-r+5) = 0$$

$$\leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 5$$

D'où les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$x \to A + Be^{5x}$ $(A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R})$

Scanné avec CamScanner

Les nombres complexes

Dans ce chapitre, on définit un ensemble $\mathbb{C}$, qui prolonge l'ensemble $\mathbb{R}$ muni d'une addition et d'une multiplication ayant les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ dont on remplace i^2 par -1.

Forme algébrique : $z \in \mathbb{C}$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$z = a + ib$$
$$Re(z) = a \quad Im(z) = b$$

Forme trigonométrique :

$$\begin{pmatrix} r \in \mathbb{R}^*_+ \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{pmatrix}, \quad z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = [r, \alpha]$$

Forme expontielle :

$$z = re^{i\alpha}$$

• <u>Egalité de deux nombres complexes</u> :

$$z = z' \leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

$$z = [r, \alpha] \quad z' = [r', \alpha'] \qquad z = z' \leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• <u>Conjugué d'un nombre complexe</u> :

$$z = a + ib \leftrightarrow \overline{z} = a - ib$$

$z \in i\mathbb{R} \leftrightarrow \overline{z} = -z$	$z \in \mathbb{R} \leftrightarrow \overline{z} = z$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$	$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

• <u>Module d'un nombre complexe</u> :

$$z = a + ib \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$z = [r, \alpha] \rightarrow |z| = r$$

$z \times \overline{z} = \|z\|^2$	$\|z\| = 1 \leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$	$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|}$

Argument d'un nombre complexe :

$$z = [r, \alpha] \rightarrow \arg(z) = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) : (n \in \mathbb{Z}^*)$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z' = [r', \alpha'] \qquad z = [r, \alpha]$$

$$z \times z' = [r \times r', \alpha + \alpha'] = r.r'.e^{i(\alpha + \alpha')}$$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right] = \frac{r}{r'}.e^{i(\alpha - \alpha')}$$

$$z^n = [r^n, n\alpha] = r^n.e^{in\alpha}$$

- Formule de moivre

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

- Formule d'euler

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\text{tel que} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Equation du seconde degré :

Scanné avec CamScanner

(E) : $az^2 + bz + c = 0$ tel que a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$
Si $\Delta > 0$; (E) a deux solutions réelles distinctes Si $\Delta = 0$; (E) a une solution double $z_0 = \frac{-b}{2a}$ Si $\Delta < 0$; (E) a deux solutions complexes conjuguées distinctes. $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$
$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ — $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
Si l'équation est sous la forme : $z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta = 0$ alors les solutions sont α et β

Affixe d'un point-Affixe d'un vecteur :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

$z = a + ib = [r, \alpha]$ et M un point et $\vec{u}$ un vecteur
On dit que z est l'affixe du point M ou $\vec{u}$ Si $\vec{u}(a, b)$ ou $M(a, b)$ on écrit $\vec{u}(z)$, $M(z)$
$\lVert\vec{u}\rVert = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = r$
$\arg \vec{u} = (\overline{\vec{e}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha + 2k\pi$

- **Propriétés :**

A et B et C des points d'affixes respectives : Z_A, Z_B et Z_C.

- $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \in \mathbb{R} \leftrightarrow$ A, B et C sont alignés.
- $AB = \lvert Z_B - Z_A\rvert$
- $z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}} \leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$ tel que $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ l'affixe de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respect.

- **Mesure d'un angle orienté**

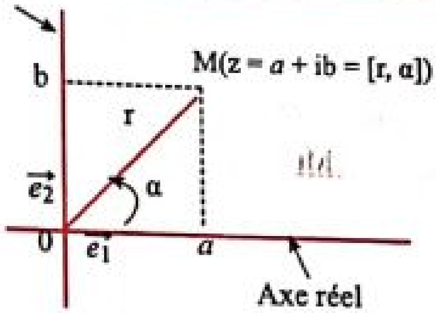
$$(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) + 2k\pi$$

$$(\overline{\vec{u}, \vec{v}}) = \arg(Z\vec{v}) - \arg(Z\vec{u}) + 2k\pi$$

Scanné avec CamScanner

$A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$ et $M(z)$

Résultats géométrique	Données algébriques
ABCD est un parallélogramme	$z_B - z_A = z_C - z_D$
I milieu du segment [AB]	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
I apartient à la médiatrice du [AB]	$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$
$M \in C_{(A,r)}$; $(r > 0)$	$\lvert z - z_A \rvert = r$
ABC est rectangle et isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \frac{+\pi}{2}\right]$
ABC est équilatéral	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$
ABC est isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1, \alpha]$



Forme complexe des transformations :

- a- Translation

Soient Z et Z' et b des nombres complexes.

La transformation du plan qui associe à tout point M(z) le point M'(z') telle que $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ (b).

- b- Homothétie

Soient Z et Z' et W des nombres complexes et $k \in \mathbb{R}^*$

La transformation du plan qui associe à tout point M(z) le point M'(z') telle que $z' - w = k(z - w)$ est l'homothétie de centre Ω d'affixe W et de rapport k.

- c- Rotation

Soient Z et Z' et W des nombres complexes et $\alpha \in \mathbb{R}$

La transformation du plan qui associe à tout point M(z) le point M'(z') telle que $z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$ est la rotation d'angle α et de centre Ω d'affixe W.

Scanné avec CamScanner

Exemples d'applications

1

Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)} \quad ; \quad i+\frac{1}{i}$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$$

Rép :

• On a : $\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} = \frac{(1+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)}{2+1}$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+2i+i}{3} = i$

• On a : $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2$

$= \frac{(1-i)^4}{2^2} = \frac{(-2i)^2}{4} = -1$

• On a : $i+\frac{1}{i} = \frac{i^2+1}{i} = \frac{-1+1}{i} = 0$

• $\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)} = \frac{(3-2i)(5+i)(-3i)(7-2i)}{[3i(-3i)][(7+2i)(7-2i)]}$

$= \frac{(-9i-6)(5+i)(7-2i)}{9(49+4)}$

$= \frac{-3(2+3i)((35+2)+i(7-10))}{477}$

$= \frac{-(2+3i)(37-3i)}{159}$

$= \frac{-[(74+9)+i(111-6)]}{159}$

$= -\frac{83}{159}+i\frac{105}{53}$

2

Soient Z_1 et Z_2 les deux nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{i}{4-3i}$ $\quad z_2 = \frac{1+i}{1-i}$

1- Mets sous forme a + bi les nombres :

z_1z_2 ; $\frac{1}{z_2}$; $\frac{1}{z_1}$; z_2 ; z_1.

2- Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$

Rép :

On remarque que Z est est l'inverse du nombre complexe :

$\frac{4-3i}{i} = -i(4-3i) = -3-4i$

Donc $z_1 = -\frac{3}{25}+\frac{4i}{25}$

• On a : $z_2 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$

D'où : $z_2 = +i$ par conséquent :

$z_1z_2 = \left(\frac{-3}{25}+\frac{4i}{25}\right)i = \frac{-4}{25}-\frac{3i}{25}$

2- On a :

$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{-3}{25}\right)^2+\left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5}$ et $|z_2| = \sqrt{(1)^2} = 1$

3

Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ le système :

$$\begin{cases}(1+i)z_1 - iz_2 = 1-i \\ (3+i)z_1 + (1-i)z_2 = 11+4i\end{cases}$$

Rép :

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & -i \\ 3+i & 1-i \end{vmatrix} = 1+3i$

$\Delta z_1 = \begin{vmatrix} 1-i & -i \\ 11+4i & 1-i \end{vmatrix} = -4+9i$

$\Delta z_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 3+i & 11+4i \end{vmatrix} = 3+17i$

Donc : $z_1 = \frac{-4+9i}{1+3i} = \frac{23}{10}+\frac{21}{10}i$

$z_2 = \frac{3+17i}{1+3i} = \frac{27}{5}+\frac{4}{5}i$

4

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $5+(3-i)$; 2) $1+i(2+i)$

3) $7(i-2)$; 4) $2i(1-i)+3i$

<u>Rép :</u>

1) $5+(3-i)=5+3-i=8-i$

2) $1+i(2+i)=1+2i+i^2$

$=1+2i-1=2i$

3) $7(i-2)=7i-14=-14+7i$

4) $2i(1-i)+3i=2i-2i^2+3i$

$=2+5i$

5

Déterminer les nombres réels x et y pour qu'on ait :

1) $4x+y+i(x-2y)=5-i$

2) $2y+i(x-y+5)=4+7i$

<u>Rép :</u>

1) $4x+y+i(x-2y)=5-i$

$\leftrightarrow \begin{cases} 4x+y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-8-1=-9$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-10+1=-9$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4-5=-9$

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=1$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=1$

6

Existe-t-il une valeur (ou des valeurs) du nombre réel x pour que le nombre :

$z=(x^2+x-2)+i(x^2-1)$; vérifier :

1) $z=0$? ; 2) $\mathrm{Re}(z)=0$? ; 3) $\mathrm{I_m}(z)=-5$?

<u>Rép :</u>

1) On a : $Z=(x^2+x-2)+i(x^2-1)$

$Z=0 \leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-2 \\ x=1 \text{ ou } x=-1 \end{cases}$

$\leftrightarrow x=1$

2) $\mathrm{Re}(z)=0 \leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\leftrightarrow x=1$ ou $x=-2$

3) $\mathrm{I_m}(z)=-5$

$\leftrightarrow x^2-1=-5$

$\leftrightarrow x^2=-4$ impossible

7

On pose pour tout nombre complexe :

$Z=\dfrac{1+3i}{z}$

1- On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\neq(0,0)$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Déterminer Re(Z) et Im(Z) en fonction de x et y.

2- Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M(z) tel que Z un nombre imaginaire pur.

<u>Rép :</u>

1) On a : $Z=\dfrac{1+3i}{z}$

et comme $z=x+iy$

alors $Z=\dfrac{1+3i}{x+iy}$

$=\dfrac{(1+3i)(x-iy)}{x^2+y^2}$

$Z=\dfrac{x-iy+3xi-3yi^2}{x^2+y^2}$

$=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}+i\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$

D'où : $\begin{cases} \mathrm{Re}(Z)=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2} \\ \mathrm{Im}(Z)=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

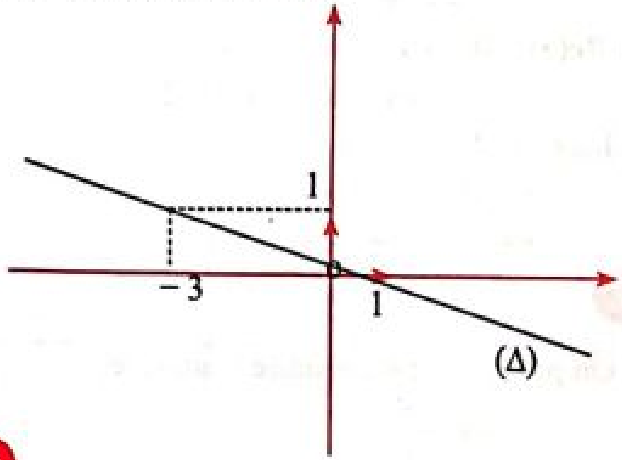
$Z\in\mathbb{R}i \leftrightarrow \mathrm{Re}(Z)=0$

$\leftrightarrow \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0$

$\leftrightarrow x+3y=0$

Scanné avec CamScanner

Donc l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $Z \in \mathbb{R}i$ est la droite (Δ) d'équation cartésienne : $x+3y=0$ privé du point O.



8

> Déterminer la valeur (ou les valeurs) du nombre réel x pour que : $z = x+3+i(x^2-4x)$ soit :
> 1- Un nombre réel.
> 2- Un nombre imaginaire pur.
> 3- égal au nombre $4-3i$.

Rép :

1) On a : $Z = x+3+i(x^2-4x)$

D'où : $Z \in \mathbb{R} \leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0$

$\leftrightarrow x^2-4x=0$

$\leftrightarrow x(x-4)=0$

$\leftrightarrow \boxed{x=0 \text{ ou } x=4}$

$Z \in \mathbb{R}i \leftrightarrow \operatorname{Re}(Z)=0$

$\leftrightarrow x+3=0$

$\leftrightarrow \boxed{x=-3}$

$Z = 4-3i \leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x^2-4x=-3 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} x=4-3=1 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \text{ ou } x=3 \end{cases}$

$\leftrightarrow \boxed{x=1}$

9

> Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
> 1- $2iz+3=z-i$.
> 2- $3z(z-i)=iz$.
> 3- $2z+5-iz=2i-3z+4iz$.
> 4- $\dfrac{iz+3}{z-1}=-4i$

Rép :

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$2iz+3=z-i$

$\leftrightarrow 2iz-z=-3-i$

$\leftrightarrow (-1+2i)z=-3-i$

$\leftrightarrow z=\dfrac{-3-i}{-1+2i}=\dfrac{3+i}{1-2i}$

$=\dfrac{(3+i)(1+2i)}{5}=\dfrac{3+6i+i-2}{5}$

$\leftrightarrow z=\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$

$S=\left\{\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$3z(z-i)=iz$

$\leftrightarrow 3z(z-i)-iz=0$

$\leftrightarrow z[3(z-i)-i]=0$

$\leftrightarrow z=0 \text{ ou } 3(z-i)-i=0$

$\leftrightarrow z=0 \text{ ou } 3z-3i-i=0$

$\leftrightarrow z=0 \text{ ou } 3z=4i$

$\leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=\dfrac{4}{3}i$

D'où : $S=\left\{0, \dfrac{4}{3}i\right\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$2z+5-iz=2i-3z+4iz$

$\leftrightarrow 2z-iz+3z-4iz=-5+2i$

$\leftrightarrow (2-i+3-4i)z=-5+2i$

$\leftrightarrow (5-5i)z=-5+2i$

$\leftrightarrow z=\dfrac{-5+2i}{5-5i}=\dfrac{(-5+2i)(5+5i)}{50}$

$$\leftrightarrow z = \frac{-25 - 25i + 10i - 10}{50}$$

$$\leftrightarrow z = \frac{-35}{50} - \frac{3}{10}i = \frac{-7}{10} - \frac{3}{10}i$$

D'où : $S = \left\{ \frac{-7}{10} - \frac{3}{10}i \right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{iz+3}{z-1} = -4i$

l'équation est définie ssi $z \neq 1$

$$\frac{iz+3}{z-1} = -4i$$

$$\leftrightarrow iz + 3 = -4i(z-1)$$

$$\leftrightarrow iz + 3 = -4iz + 4i$$

$$\leftrightarrow iz + 4iz = -3 + 4i$$

$$\leftrightarrow 5iz = -3 + 4i$$

$$\leftrightarrow z = \frac{-3+4i}{5i} = \frac{(-3+4i)i}{5i^2}$$

$$\leftrightarrow z = \frac{-3i + 4i^2}{5i^2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

D'où $S = \left\{ \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right\}$

10

> Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants d'inconnues z_1 et z_2 .
>
> 1) $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ 2z_1 - 3iz_2 = 17 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} z_1 - z_2 = i \\ iz_1 + z_2 = 1 \end{cases}$

Rép :

1) Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ 2z_1 - 3iz_2 = 17 \end{cases}$$

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3i \end{vmatrix} = -6i + 2$

$$\Delta z_1 = \begin{vmatrix} i & -1 \\ 17 & -3i \end{vmatrix} = -3i^2 + 17 = 20$$

$$\Delta z_2 = \begin{vmatrix} 2 & i \\ 2 & 17 \end{vmatrix} = 34 - 2i$$

D'où : $z_1 = \frac{\Delta z_1}{\Delta} = \frac{20}{2-6i} = \frac{10}{1-3i}$

$$z_1 = \frac{10(1+3i)}{10} = 1 + 3i$$

$$z_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta} = \frac{34-2i}{2-6i} = \frac{17-i}{1-3i}$$

et $z_2 = \frac{(17-i)(1+3i)}{10}$

$$= \frac{17 + 51i - i + 3}{10} = 2 + 5i$$

$S_{\mathbb{C}^2} = \{(1+3i, 2+5i)\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système :

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = i & (1) \\ iz_1 + z_2 = 1 & (2) \end{cases}$$

additionnons les deux équations (1) et (2) membre à membre on obtient :

$$z_1 - z_2 + iz_1 + z_2 = i + 1$$

$$\leftrightarrow (1+i)z_1 = 1 + i$$

$$\leftrightarrow z_1 = 1$$

On remplace dans l'équation (1) z_1 par 1 on obtient : $1 - z_2 = i$

$$\leftrightarrow z_2 = 1 - i$$

D'où : $S_{\mathbb{C}^2} = \{(1, 1-i)\}$

11

> Représenter dans le plan complexe les nombres A; B; C et D d'affixes respective:
>
> z_1, z_2, z_3 et z_4 tels que :
>
> $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -5i$, $z_3 = \frac{1}{2}$, $z_4 = \frac{3}{2} + i$

Rép :

On a : $z_1 = 4 - 3i$ est l'affixe de A

D'où : $A(4, -3)$ et $z_2 = -5i$ est l'affixe de B

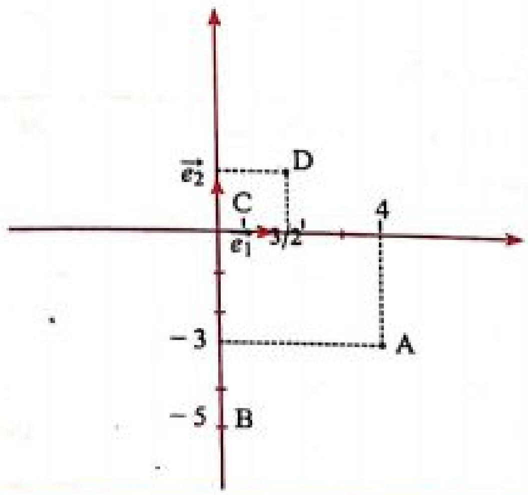
D'où : $B(0, -5)$ et $z_3 = \frac{1}{2}$ est l'affixe de C

D'où : $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

et $z_4 = \frac{3}{2} + i$ est l'affixe de D

Donc : $D\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

Construction de A, B, C et D :



Scanné avec CamScanner

Géomètrie analytique dans l'espace

Dans ce chapitre, nous supposons que l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

I - Produit scalaire dans l'espace :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls dans l'espace.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$$\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points dans l'espace.

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

On appelle vecteur normal à un plan (P), tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteurs normal.

La distance d'un point à un plan :

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, la distance du point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan (P) est :

$$d(A,(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **Propriétés :**

* Une droite est orthogonale à un plan ssi un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.
* Deux plans sont parallèles si est seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

* Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leur vecteurs normaux sont orthogonaux.
* Deux droites sont parallèles si est seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
* Deux droites sont orthogonaux si et seulement si leur vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Scanné avec CamScanner

II - Produit vectoriel dans l'espace :

1- On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans l'espace

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ définie par :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

- Propriété

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\leftrightarrow$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{u}$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{v}$; $\sin(\widehat{BAC})=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$
- $(\vec{u}\wedge\vec{v})=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$

- Applications du produit vectoriel dans l'espace :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs d'un plan (P); alors le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal du plan (P).
- A; B et C trois points non alignés si est seulement si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ et dans ce cas; le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

$$M\in(ABC)\leftrightarrow\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$$

- L'aire d'un triangle ABC est égale à : $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$
- L'aire d'un parallélogramme ABCD est $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$
- Si (D) une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; alors pour tout point M d'espace on a :

$$d(M,(D))=\frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

III - La sphère :

- 1- Equation cartésienne d'une sphère :

- L'équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est :

$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

- L'équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre [AB] est donnée par :

$$M(x,y,z)\in(S)\leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$
$$\leftrightarrow(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

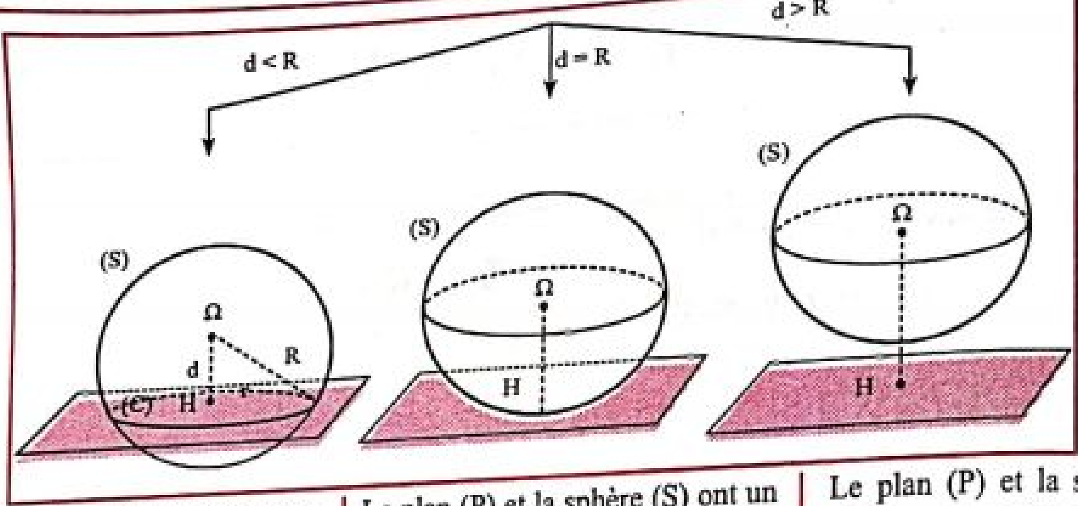
Scanné avec CamScanner

• 2- Intersection d'une sphère et d'un pain :

Soient (s) une sphère de centre Ω et de rayon R; et (P) un plan d'équation : (P): $ax + by + cz + d = 0$

Soit H le projeté orthogonale de Ω sur (P).

On pose $d = \Omega H = d(\Omega, (P))$



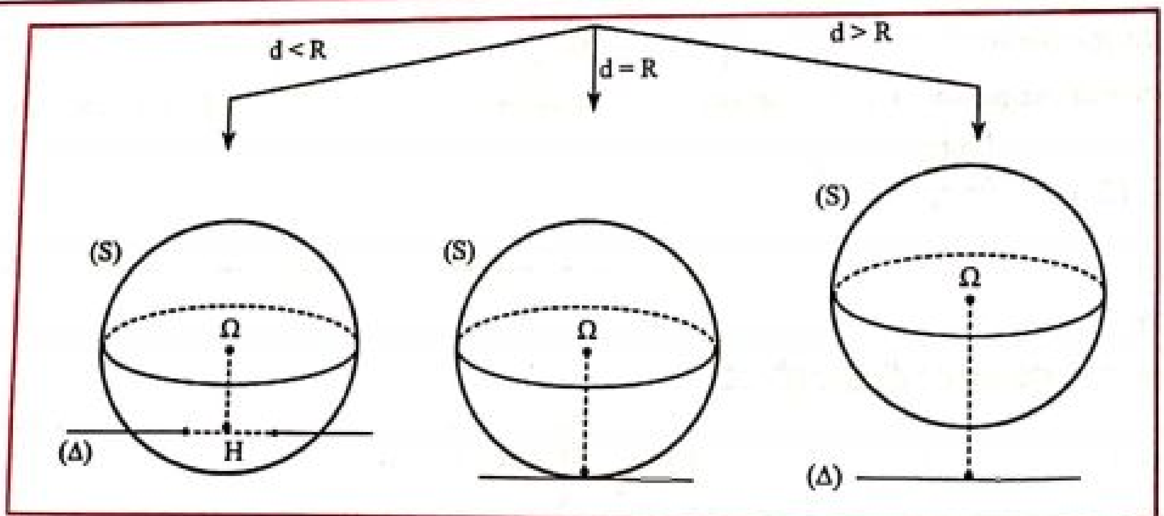
L'ensemble des points en commun au plan (P) et la sphère (S) est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun H; dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent à (S) en H.	Le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de point en commun. L'intersection est vide.

• 2- Intersection d'une sphère et d'une droite :

Soit (Δ) une droite et (S) une sphère de centre Ω et de rayon R.

H la projection orthogonale du point Ω sur la droite (Δ).

Notons : $d = \Omega H = d(\Omega; (\Delta))$



La sphère (S) et la droite (Δ) s'intersectent en deux points distincts.	La sphère (S) et la droite (Δ) sont sécantes en un point H. On dit que (Δ) est tangente à (S) en H.	La sphère (S) et la droite (Δ) ne s'intersectent pas. $(\Delta) \cap (S) = \phi$

Scanné avec CamScanner

Exemples d'applications

1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(2, 0, 2)$ et le plan (P) d'équation (P) : $x + y - z - 3 = 0$

1- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P).

2- Déterminer les coordonnées de point B intersection de la droite (D) et le plan (P)

3- Soit (S) une sphère de centre A qui s'intersecte avec plan (P) en un cercle de centre B et de rayon 2; déterminer le rayon de (S) et une équation cartésienne.

Rép :

1- Déterminons une représentation paramétrique de (D) :

On a $(P) \perp (D)$; donc tout vecteur normal au plan (P) est un vecteur directeur de (D).

Or $\vec{u}(1, 1, -1)$ vecteur normal au (P);

donc $\vec{u}(1, 1, -1)$ est vecteur directeur de (D).

Comme (D) passant par $A(2, 0, 2)$

Donc la représentation paramétrique de (D) est :

$$M(x, y, z) \in (D) \leftrightarrow (D): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Rappel :

Si $ax + by + cz + d = 0$ l'équation cartésienne d'un plan (P).

Alors le vecteur $\vec{u}$ (a,b,c) est normal au plan (P)

2- Déterminons les coordonnées du point B.

B est le point d'intersection de la droite (D) et le plan (P).

Donc les coordonnées de B sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

On remplace x, y, z dans l'équation de (P).

on trouve $(2 + t) + t - (2 - t) - 3 = 0 \leftrightarrow t = 1$

Donc : $x = 3$; $y = 1$; $z = 1$

D'où B a pour coordonnées $\boxed{B(3, 1, 1)}$

Remarque : L'intersection d'une droite et d'un plan se recherche en résolvant le système formé par la représentation paramétrique de droite et l'équation du plan.

3- Déterminons le rayon R de (S) : Soit R le rayon de la sphère (S).

On a (P) et (S) s'intersectent en un cercle de rayon 2.

Donc : $2 = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$\leftrightarrow R^2 = 4 + d^2 \leftrightarrow R = \sqrt{4 + d^2}$$

Or $d = d(A, (P))$

$$= \frac{|2 + 0 - 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Alors : $R = \sqrt{4 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{7}$

L'équation de (S) :

(S) sphère de centre A(2,0,2) et de rayon $R = \sqrt{7}$

Donc : $M(x, y, z) \in (S)$

$$\leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 7 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 1 = 0 \leftrightarrow$$

$$\boxed{(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 1 = 0}$$

2

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal on considère la sphère (S) d'équation :

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$$

et le plan (P) d'équation (P) = $x + y - 3 = 0$

1- Montrer que le plan (P) est tangent à (S).

2- Déterminer les coordonnées du point de tangence de (P) et (S).

Rép :

1- Montrons que (P) est tangent à (S) :

On a : (S) : $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$

Ainsi que la sphère (S) et le plan (P) s'intersectent suivant un cercle de rayon R et de centre H.

2- Précisons le rayon R et le centre H :

* On a le rayon R est donné par

$$R = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$$

* H le projeté orthogonal de Ω sur (P)

Donc H point d'intersection de (P) et la droite (Δ) passe par Ω et orthogonale à (P).

Donc pour déterminer les coordonnées de H il faut résoudre le système : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -t \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$

On remplace x, y et z dans l'équation de (P)

On trouve $1 + t - (-t) + 1 = 0 \leftrightarrow t = -1$

D'où : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

càd : H(0,0,1)

5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le plan (P) et la sphère (S) définis respectivement par les équations :

$$\begin{cases} (P) : x - 2y + 2z - 2 = 0 \\ (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

1- Préciser le centre et le rayon de la sphère (S).

2- Montrer que (P) est tangent à (S).

3- Déterminer le point tangent de (P) et (S).

Rép :

1- Le centre et le rayon de la sphère (S) :

On a (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$

$\leftrightarrow (x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 2z) + 1 = 0$

$\leftrightarrow (x - 1)^2 - 1^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 1^2 + 1 = 0$

$\leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1,0,-1)$ et son rayon $r = \sqrt{1} = 1$

Rappel :

* $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

* $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Si (S) est une sphère d'équation

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Alors son rayon est :

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d}$$

et son centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$

Exemple :

On a (S) une sphère d'équation

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$

Donc : $r = \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1}$

$= \sqrt{1} = 1$

et le centre de (S) est $\Omega(1,0,-1)$

2- Montrons que (P) est tangent à (S) :

(P) est tangent à $(S)(\Omega, r) \leftrightarrow d(\Omega, (P)) = r$

La distance du centre du Ω au (P) est :

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1 - 2 \times 0 + 2(-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

Or : $r = 1$

Alors : $d(\Omega, (P)) = r$

D'où (P) est tangent à (S).

3- Déterminons H le point de tangence de (P) et (S) :

H le point de tangence de (P) et (S), donc H est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

Donc H est un point d'intersection de (P) avec la droite passant par Ω et orthogonal à (P).

D'où le triplet des coordonnées de H doivent vérifier.

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x = 1 + t & (t \in \mathbb{R}) \\ y = -2t \\ z = -1 + 2t \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Donc $(1 + t) - 2 \times (-2t) + 2(-1 + 2t) - 2 = 0$

$\leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Et par suite $\begin{cases} xH = \frac{4}{3} \\ yH = -\frac{2}{3} \\ zH = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Donc : $H\left(\frac{4}{3} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$

6

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: la droite (D) passant par le point A(1,1,1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (0,1,2). La droite (D') passant par A'(0,1,−2) et de vecteur directeur $\vec{u'}$(1,0,1).

1- Montrer que (D) et (D') sont non coplanaires.

2- Ecrire une équation cartésienne du plan (P) passant par A' et perpondiculaire à (D).

3- Soit (Q) le plan d'équation : $x + z + 2 = 0$

- Montrer que (D') ⊥ (Q) en A'.

4- Montrer que les plans (P) et (Q) s'intersectent suivant la droite (Δ) dont on précisera une représentation paramétrique.

5- Déterminer le triplet des coordonnées de Ω le centre de la sphère tangente à (D) et (D') en A et A' respectivement et calculer son rayon.

Rép :

1- Montrons que (D) et (D') non coplanaires

(D) et (D') coplanaires. $\overrightarrow{AA'}$, $\vec{u}$, $\vec{u'}$ des vecteures coplinaires $\leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}) = 0$

On a: $\overrightarrow{AA'}(-1, 0, -3)$; $\vec{u}(0,1,2)$; $\vec{u'}(1,0,1)$

Donc $\det(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -1 + 3 = 2$

Donc $\det(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}) \neq 0$ $\overrightarrow{AA'}$, $\vec{u}$, $\vec{u'}$ non coplanaires et par conséquent (D) et (D') non coplanaires.

2- L'équation cartésienne de (P) :

On a (D) ⊥ (P), alors de vecteur directeur de (D) est un vecteur normal à (P).

Donc $\vec{u}$(0,1,2) vecteur normal à (P)

Donc : (P) : $y + 2z + d = 0$

Or : A ∈ (P)

Alors $1 + 2 \times 1 + d = 0 \leftrightarrow d = -3$

D'où : (P): $y + 2z - 3 = 0$

3- Montrons que (D') ⊥ (Q) :

On a (Q) : $x + z + 2 = 0$

Donc $\vec{u}$(1,0,1) est un vecteur normal à (Q)

Comme $\vec{u}$(0,1,2) vecteur directeur de (D') et $\vec{u'} = \vec{n}$

Alors (D') perpendiculaire au (P)

D'autre part on a :

(Q): $x + z + 2 = 0$ et A'(0,1, −2)

Donc $0 + (-2) + 2 = 0$

Donc A' ∈ (Q)

et puisque A' ∈ (D')

(D') perpendiculaire à (Q) au A'.

4- Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) d'intersection des deux plans (P) et (Q) :

On suppose que (P) et (Q) sont parallèles.

Alors (P) // (Q) Or (D) ⊥ (P)

Donc (D) ⊥ (Q) et puisque (D') ⊥ (Q)

Scanné avec CamScanner

Alors (D') // (D) contradictoire car (D) et (D') non coplanaires.

D'où (P) et (Q) sont sécantes suivant une droite (Δ)

soit $M(x,y,z) \in (\Delta)$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y+2z-3=0 \\ x+z+2=0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y=3-2z \\ x=-2-z \end{cases}$$

On pose $z=\lambda$ d'où la représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x=-2-\lambda \\ y=3-2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z=\lambda \end{cases}$$

5- Déterminons Ω centre de la sphère (S) :

Soit $\Omega(x,y,z)$ centre de la sphère (S)

On a (S) tangente à (D) en A.

Donc $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u}=0$ donc $\Omega \in (P)$ (1)

De même on a (S) tangente à (D') en A'

Donc $\overrightarrow{\Omega A'} \cdot \vec{u'}=0$ donc $\Omega \in (Q)$ (2)

D'après (1) et (2) : $\Omega \in (P) \cap (Q)$ càd $\Omega \in (\Delta)$

Donc $x=-2-z$ et $y=3-2z$

Or $\Omega A=\Omega A'$

$\leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

$=x^2+(y-1)^2+(z+2)^2$

Donc $-2x-2y-2z+3=-2y+4z+5$

D'où : $x=-3z-1 \rightarrow -2x=6z+2$

Donc : $-2-z=-3z-1$ donc $z=\frac{1}{2}$

D'où : $x=-\frac{5}{2}$ et $y=2$

Par conséquent $\Omega\left(-\frac{5}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

Calculons le rayon de (S)

On a $A \in (S)$

Donc ΩA le rayon de (S)

D'où : $\Omega A=\left(-1+\frac{5}{2}\right)^2+(1-2)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{54}}{2}$

7

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $x+y-z+1=0$, la sphère (S) de centre $\Omega(0,1,2)$ et de rayon $R=1$.

1- a- Donner l'équation cartésienne de (S).

b- Vérifier que Ω appartient à (P). En déduit l'intersection de (P) et (S).

2- Soit (Q_m) le plan d'équation :

$x+my-2=0$ tels que m un paramètre réel.

a- Déterminer m pour que (P) et (Q_m) soient pérpendiculaire.

b- Déterminer m tel que le plan (Q_m) est tangent à (S).

Rép :

1- a- L'équation cartésienne de (S) :

On a (S) une sphère de centre $\Omega(0,1,2)$ et de rayon $r=1$.

Donc $M(x,y,z) \in (S)$

$\leftrightarrow x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1^2$

$\leftrightarrow \boxed{(S) : x^2+y^2+z^2-2y-4z+4=0}$

Vérifions que $\Omega \in (P)$

On a (P): $x+y-z+1=0$ et $\Omega(0,1,2)$

En remplaçant les coordonnées de Ω dans l'équation de (P); on trouve $0+1-2+1=0$

D'où : $\Omega \in (P)$

L'intersection de (S) et (P) :

On a $\Omega \in (P)$ donc $d(\Omega,(P))=0$

D'où : $d(\Omega,(P))<r$

Alors (P) coupe (S) suivant le grand cercle: (càd le cercle de centre $\Omega(0,1,2)$ et de rayon $R=r=1$

2- a- Déterminons m tel que $(P) \perp (Q_m)$

On a (P): $x+y-z+1=0$

Scanné avec CamScanner

Le vecteur $\vec{n}(1,1,-1)$ est alors un vecteur normal à (P). et à (Q_m): $x + my - 2 = 0$

Donc $\overrightarrow{n_m}(1,m,0)$ est un vecteur normal à (Q_m)

$$(P) \perp (Q_m) \leftrightarrow \vec{n} \perp (Q_m) \leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{nm}$$
$$\leftrightarrow \vec{n} . \overrightarrow{n_m} = 0$$
$$\leftrightarrow 1 \times 1 + 1 \times m + (-1) \times 0 = 0$$
$$\leftrightarrow 1 + m = 0 \leftrightarrow \boxed{m = -1}$$

2- b- Déterminons m tel que (Q_m) est tangent à (S):

(Q_m) est tangent à (S).

$$\leftrightarrow d(\Omega,(Q_m)) = r$$
$$\leftrightarrow \frac{|0 + m - 2|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1$$
$$\leftrightarrow |m - 2| = \sqrt{1 + m^2}$$
$$\leftrightarrow (m - 2)^2 = 1 + m^2$$
$$\leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = m^2 + 1$$
$$\leftrightarrow -4m = -3 \leftrightarrow \boxed{m = \frac{3}{4}}$$

8

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une sphère de centre Ω et coupe les deux plans (P_1) et (P_2) respectivement suivant un cercle (C_1) de centre H1 et un cercle (C_2) de centre H_2.

1- Montrer que Ω ; H_1 ; H_2 sont alignés si et seulement si (P_1) et (P_2) sont parallèles.

2- On suppose que les points Ω ; H_1 ; H_2 ne sont pas alignés.

- Montrer que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (D) perpendiculaire au plan $(\Omega\ H_1\ H_2)$.

Rép :

1- Montrons que Ω ; H_1 ; H_2 sont alignés $\leftrightarrow$ $(P_1) /\!/ (P_2)$

On a H_1 le centre de cercle d'intersection de (S) et (P_1)

Donc H_1 est le projeté orthogonal de Ω sur (P_1)

Donc $(P_1) \perp (\Omega H_1)$

De même on a : $(P_2) \perp (\Omega H_2)$

Alors Ω ; H_1 ; H_2 sont alignés $\leftrightarrow (\Omega H_1) \equiv (\Omega H_2)$

Donc $(P_1) /\!/ (P_2)$

Réciproquement : si $(P_1) /\!/ (P_2)$

et on a $(P_1) \perp (\Omega H_1)$

Alors : $(P_2) \perp (\Omega H_1)$

Or $(P_2) \perp (\Omega H_2)$

Alors $(\Omega H_1) /\!/ (\Omega H_2)$

D'où : Ω ; H_1 ; H_2 sont des points alignés.

Par suite Ω ; H_1 ; H_2 sont alignés $\leftrightarrow$ $(P_1) /\!/ (P_2)$

2- Montrons que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (D) perpendiculaire au plan $(\Omega\ H_1\ H_2)$:

Rappel :

Une droite (D) est perpendiculaire ou orthogonale à un plan (P) si et seulement si, il existe deux droites sécantes de (P) perpendiculaire à (D).

On a Ω ; H_1 ; H_2 sont des points non alignés

Alors d'après la question (1) : (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.

Donc (P_1) et (P_2) sécants suivant une droite (D)

Or $(\Omega H_1) \perp (P_1)$ et $(D) \subset (P_1)$

Scanné avec CamScanner

Dénombrement et probabilités

1- Dénombrement :

Cardinal d'un ensemble :

- Définition :

Si E un ensemble fini. On note card(E) son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.
On appelle "ensemble vide" et on note $\emptyset$, l'ensemble qui ne contient aucun élément. **On a Card $\emptyset = 0$**

- Propriété :

Etant données deux ensembles A et B.
- On note $A \cap B$ l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
- On note $A \cup B$ l'ensemble formé des éléments qui sont soit dans A, soit dans B.

On a **Card $(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$**

Complimentaire d'un ensemble :

- Définition :

Soit A une partie d'un ensemble fini E.
Le complimentaire de A dans E est l'ensemble noté : $\overline{A}$ ou C_E^A
tel que $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$
Remarque : $A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A} = E$
$\text{card}\,\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

- Principe :

Considérons une expérience ces résultats se réalise par p choix ($p \in \mathbb{N}^*$)
si le premier choix est réalisé de n_1 façons différentes.
Et le deuxième choix se fait de n_2 façons différentes.

⋮

et si le $p^{ième}$ choix ce fait de n_p façons différentes.
Alors le nombre de résultats possibles est le produit : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$

Scanné avec CamScanner

Arrangement avec répétition - Arrangement sans répétition :

* Arrangement avec répétition :

- Définition :

Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$.
Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments parmi n est n^p

* Arrangement sans répétition :

- Propriété :

Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$.
Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}_{p\ facteurs}$$

- Cas particulier :

Tout arrangement sans répétition de n élément parmi n est appelé : permutation de n élément et son nombre est : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

- Combinaisons :

Soit E un ensemble de cardinal n, toute partie A de E de cardinal $p(p \leq n)$ est appelé combinaison de p éléments parmi n élément.
Le nombre de ces combinaisons est $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Les nombres $n!$ et A_n^p et C_n^p

$n \in \mathbb{N}^*$	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ $0! = 1$		
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$		$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$	
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^n = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$		$C_n^p = C_n^{n-p}$	

- Le nombre de possibilités d'arrangement de n éléments.

Si on a n éléments dont : n_1 élément de type A

n_2 élément de type B

n_3 élément de type C

Alors le nombre de possibilités d'arrangement de ces n éléments est : $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$

2 - Probabilité :

- Probabilité :

Supposons qu'on a effectué une expérience aléatoire.

* Tout résultat possible est appelé issue, possibilité ou événement élémentaire.

* Toutes les possibilités forment un endemble Ω appelé l'univers de l'expérience aléatoire, on écrit :

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ où chaque ω_i est l'un des n résultat possibles.

* Toute partie A de Ω est appelée " un événement"

On dit qu'un événement A est réalisé si 1 issue est un élément de A.

* Soient A et B deux éléments :

- Si A et B se réalisent en même temps alors on dit que l'événement $(A \cap B)$ est réalisé.

- Si l'un au moins des événements A et B est réalisé on dit que l'événement $(A \cup B)$ est réalisé.

* Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire et $P(\Omega)$ est l'ensemble des événements que l'on peut considèrer.

Nous rappelons dans le tableau suivant les terminologies couramment employées.

Langage probabilité	Langage ensembliste
événement	partie de Ω
événement élémentaire	Singleton de Ω
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement contraire de A	$\overline{A}$
événement incompatibles A et B	élément A et B de Ω tel que : $A \cap B = \emptyset$

Scanné avec CamScanner

3 - Probabilité sur l'univers des possibilités :

1- Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ l'univers des possibilités si on associe à tout élément a_i de Ω au nombre réel p_i de [0, 1] tel que : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ on dit qu'on à définie une probabilité p sur Ω (p est une application de Ω vers [0, 1])

p_i est appelé la probabilité de l'événement élémentaire a_i.

Le couple (Ω, p) est appelé un espace de probabilité fini.

• 2- Probabilité d'un événement :

Soit $A = \{a_1, ..., a_k\}$ une partie de Ω

La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des éléments de A et on la note $p(A)$.

Remarque : $p(\emptyset) = 0$; $p(\Omega) = 1$

• 3- Propriétés :

(Ω, p) est un espace de probabilité fini, A et B deux événements.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

4 - Cas des événements élémentaire équiprobables :

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité alors ;

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} \text{, pour toutes partie A de } \Omega$$

et on a $p(a_1) = \frac{1}{n}$ pour tout événement élémentaire où $(\text{Card}\Omega = n)$

5 - Probabilité conditionnelle :

A et B deux événements tel que $p(A) \neq 0$ la probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est : $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

On la note $p_{B/A}$ on $p_A(B)$.

- Si les événements élémentaires sont équiprobables alors : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$

- Propriété :

A et B deux événements, tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$

$$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B)$$

- Le réel $p_A(B)$ est la probabilité de B sachant que A est réaliser, ou encore la probabilité conditionnelle de B relative à A.

6 - Probabilité totales :

- Définition :

Soit Ω l'univers des possibilités. A et B deux événements tel que $p(A) \neq 0$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ des parties de Ω.

On dit que les événements $Ai(1 \leq i \leq n)$ forment une partition de Ω si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

- Propriété :

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'espace Ω et B un événement :

$$p(B) = p(A_1).\, pA_1(B) + p(A_2).\, pA_2(B) + \dots + p(A_n).\, pA_n(B)$$

7 - Evénement indépendants :

- Définition :

(Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. A et B sont indépendants si et seulement si l'on a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

8 - Epreuves répétées indépendantes :

- Propriété :

A est un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire. Si on répéte l'experience n fois, et si les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres, alors la probabilité de la réalisation de l'événement A k fois $(k \leq n)$ est $C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

Variables aléatoires réelles :

- Définition :

(Ω, p) un espace de probabilité fini.

Toute application de Ω vers $\mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire réelles.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle :

X est une variable aléatoire et $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ sont les valeurs prise par X. la loi de probabilité de X est l'application f qui associe x_i par sa probabilité p_i : $f(x_i) = p(X = x_i) = p_i$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire X :

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p_i$ tels que xi les valeurs prises par X et $p_i = p(X = x_i)$

Variance - Ecart-type :

- Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$
- Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Loi binomiale :

A est un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire. On répète l'expérience n fois. X est la variable aléatoire qui associe tout résultat par le nombre de fois de la réalisation de l'événement A.

$$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1 - p)^{n-k}$$

- n et p sont les paramètres de la variable aléatoire X.

$E(X) = n \times p$ et $V(X) = n \times p(1 - p)$

Le nombre de résultats possible dans un tirage de p éléments parmi n :

Langage probabilité	Langage ensembliste
Tirage simultané de p élément parmi n	C_n^p
Tirage successive et sans remise de p élément parmi n	A_n^p
Tirage successive et avec remise de p élément parmi n	n^p

- Le nombre d'applications d'un ensemble ayant p élément vers un ensemble de cardinal n est n^p.

Scanné avec CamScanner

Exemples d'applications :

1

Résoudre dans ℕ les équations suivantes:

1) $A_n^2 + C_n^3 = 7$
2) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2 + 25}{6}$
3) $C_n^5 = 17\, C_n^4$
4) $20.n! = (n+2)!$

Rép :

1) Résolvons dans ℕ l'équation proposée pour ($3 \le n$ et $2 \le n$) càd $3 \le n$ on obtient:

$$A_n^2 + C_n^3 = 7 \leftrightarrow n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 7$$
$$\leftrightarrow 6(n-1)n + n(n-1)(n-2) = 6.7$$
$$\leftrightarrow (n-1)n(n-2+6) = 6.7$$
$$\leftrightarrow (n-1)n(n+4) = 2.3.7$$
$$\leftrightarrow \boxed{n = 3}$$

2) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2 + 25}{6}$

Pour $3 \le n$ on obtient :

$$C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2 + 25}{6}$$
$$\leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3 - 6n^2 + 25}{6}$$
$$\leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2) - 3n(n-1)}{6} = \frac{n^3 - 6n^2 + 25}{6}$$
$$\leftrightarrow (n^3 - 3n^2 + 2n) - (3n^2 - 3n) = n^3 - 6n^2 + 25$$
$$\leftrightarrow 5n = 25$$
$$\leftrightarrow \boxed{n = 5}$$

3) $C_n^5 = 17\, C_n^4$

Pour $n \ge 5$ on obtient :

$$C_n^5 = 17\, C_n^4 \leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!5!} = 17 \cdot \frac{n!}{(n-4)!4!}$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{(n-5)!4!5} = \frac{17}{(n-4)!4!}$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{5(n-5)} = 17$$
$$\leftrightarrow n - 5 = \frac{1}{17.5} = \frac{1}{85}$$
$$\leftrightarrow \boxed{n = 5 + \frac{1}{85}}$$

4) $20.n! = (n+2)!$

$$\leftrightarrow 20.n! = (n+2).(n+1).n!$$
$$\leftrightarrow (n+2)(n+1) = 20 = 5.4$$
$$\leftrightarrow \boxed{n = 3}$$

2

Ecrire en fonction de n les nombres suivants (on déterminera les conditions d'existence)

1) A_n^3 ; 2) A_{2n}^3
3) A_{3n}^4 ; 4) A_{2n}^{n-1}

Rép :

1) On obtient sous la condition : $3 \le n$

$$A_n^3 = n(n-1)(n-3)$$

2) On obtient sous la condition : $3 \le 2n$ càd $n \ge 2$

$$A_{2n}^3 = 2n(2n-1)(2n-2)$$

3) On obtient sous la condition : $4 \le 3n$ càd $n \ge 2$

$$A_{3n}^4 = 3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)$$

4) On obtient sous la condition : $0 \le n - 1 \le 2n$ càd $n \ge 1$:

$$A_{2n}^{n-1} = 2n(2n-1)(2n+2)...(2n-(n-1)+1)$$
$$= 2n(2n-1)(2n-2)...(2n-n+1+1)$$
$$= 2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)$$

3

Calculer les nombres suivants :

$\frac{52!}{50!}$; $\frac{5!}{2!}$; A_{24}^3 ; A_{15}^3 ; C_{24}^{19} ; C_9^5

Rép :

* $C_9^5 = \frac{A_9^5}{5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 7 \times 2 = 126$
* $C_{24}^{19} = C_{24}^5 \quad (C_n^p = C_n^{n-p})$

$$= \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 23 \times 22 \times 21 \times 4 = 42504$$

* $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$

* $A_{24}^3 = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21!}{21!}$

$$= 24 \times 23 \times 22 = 12144$$

* $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

* $\frac{52!}{50!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{50!} = 52 \times 51 = 2652$

4

a- Montrer que : $A_n^2 = 2A_{n-1}^1 + A_{n-1}^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{N}$: $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$

Rép :

a- On a d'après la formule de Pascal :

$$C_n^2 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1$$

Càd : $\frac{A_n^2}{2!} = \frac{A_{n-1}^2}{2!} + \frac{A_{n-1}^1}{1!}$

Donc $\frac{A_n^2}{2} = \frac{A_{n-1}^2}{2} + \frac{A_{n-1}^1}{1}$

D'où : $A_n^2 = A_{n-1}^2 + 2A_{n-1}^1$

b- Résolvons l'équation ; la condition d'existence de l'équation est $n \geq 3$.

$C_n^1 = n$

$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n.(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2).(n-3)!}{3 \times 2 \times 1 \times (n-3)!}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Donc l'équation proposée équivaut à :

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$$

Càd :

$$\frac{n}{6}(6 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) - 30) = 0$$

Donc : $n = 0$

Où : $3(n-1) + (n-1)(n-2) - 24 = 0$ (*)

(*) équivant à : $n^2 - 25 = 0$ (*)

$(n-5)(n+5) = 0$

et comme on cherche les solutions de l'équation dans :

$\{n \in \mathbb{N} / n \geq 3\}$

Alors : $S = \{5\}$

5

Un sac contient 4 billets de 200DH et 3 billets de 100DH et 3 billets de 50DH (indiscernable au toucher).

On tire au hasard et simultanément 4 billets du Sac.

1- Qu'il est le nombre de tirage possibles?

2- Qu'il est le nombre de tirage possible dont la valeur est 500DH ?

3- a- Qu'il est le nombre de tirage possibles dont la valeur est inférieur à 700DH ?

b- Qu'il est le nombre de tirage possibles dont la valeur est supérieur à 650DH ?

Rép :

1- On tire simultanément 4 billets du sac qui contient 10 billets càd choix d'une combinaison de 4 éléments parmi 10.

Donc le nombre de tirage possibles est C_{10}^4

càd : $\frac{10!}{4!6!} = 210$

2-On a : $500 = 1.200 + 3.100$ et $500 = 2.200 + 2.50$

Donc pour avoir 500DH il suffit de choisir 2 billets de 200DH et deux billets de 50DH on va choisir 1 billet de 200DH et 3 billets de 100DH.

Donc le nombre de tirage possibles dans ce cas est:

Scanné avec CamScanner

$C_4^2 \times C_3^2 + C_4^1 \times C_3^3$ càd $6 \times 3 + 4 \times 1 = 22$

3- a- On obtient au moins 700Dh si on tire 3 billets de 200Dh et une billet de 100Dh où 4 billets de 200Dh.

Donc le nombre cherché est :

$$C_4^3 \cdot C_3^1 + C_4^4 = 4.3 + 1 = 13$$

b- Soit x le nombre de tirage possibles dont la valeur est superieur strictement à 650Dh le nombre cherché est $(210\text{-}x)$.

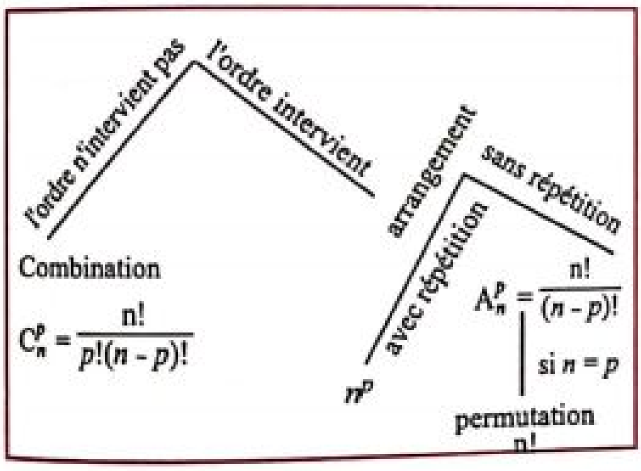
D'où le nombre de tirage demandé est :

$$210 - 13 = 197$$

Remarque :

Pour faire un exercice de dénombrement il faut bien lire l'énoncé de l'exercice et savoir si l'ordre intervient ou non.

Si l'ordre intervient on voit si il y a répétition ou non et on peut utiliser le diagramme suivant :



6

On considère 7 points distincts A_1 ; A_2; A_3 ; A_4 ; A_5 ; A_6 ; et A_7 du plan. On suppose que trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés.

1- Qu'il est le nombre de segment $[A_i ; A_j]$ tel que $i \neq j$ peut-on déterminer de ces 7 points?

2- Quel est le nombre de triangles que peut-on déterminer avec ces 7 points ?

3- Quel est le nombre de bi points $(A_i ; A_j)$ $(i \neq j)$ que peut-on déterminer avec ces 7 points?

4- Supposons qu'on a construit ces points géométriquement et on colorie l'une de ces points par la couleur rouge et les autres par la couleur bleue.

De combien de façons peut-on construit ces points sachants que la position de chaque point est bien déterminée ?

Rép :

1- Chaque segment $[A_i; A_j](i \neq j)$ est déterminé par le bipoint $(A_i; A_j)$ est le nombre de segment $[A_i ; A_j]$ est le nombre de bipoint $\{A_i; A_j\}$ tel que $i \neq j$ et $\{A_i ; A_j\} \subset \{A_1 ; A_2 ..... A_7\}$.

Càd le nombre des ensembles de cardinal 2 parmi les éléments de l'ensemble$\{A_1 ; A_2 ... A_7\}$

càd $C_7^2 = 21$.

2- Chaque triangle est défini par l'ensemble $\{A_i ; A_j; A_k\}$tel que i, j et k sont distincts deux à deux.

Donc le nombre de triangle est $C_7^3 = 35$

3- Le nombre de dipoints $(A_i ; A_j)$ $i \neq j$ qu'on peut déterminer avec les points précédents est $A_7^2 = 42$.

4- L'orsqu'on colorie un point parmi les A_i alors on définit une application de $\{A_1 ; A_2 ... A_7\}$ Vers l'ensemble $B = \{\text{bleu, rouge}\}$ et comme $CardA = 7$ et $CardB = 2$ alors le nombre de représentations possibles est $2^7 = 128$.

7

7 hommes et 3 femmes sont invités à s'asseoir sur 5 chaises de façon que les chaises sont toutes occupées.

1- Quel est le nombre de dispositions possibles distinctes si les femmes sont obligées de s'asseoir ?

Scanné avec CamScanner

Rép :

1- On a 10 personnes sont invitées à s'asseoir sur 5 chaises de façons que les chaises sont toutes occuppées c'est à dire c'est le nombre d'arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 10 donc le nombre chercher est $A_{10}^{5} = 30240$

2- Pour que les femmes s'asseoient sur 3 chaises il faut choisir trois chaises parmi les 5 et comme l'ordre intervient et pas de répétition alors le nombre de façons pour que les trois femmes s'asseoient est A_5^3 donc il reste à choisir deux hommes pour les chaises restantes donc le nombre de possibilités est A_7^2 par conséquent le nombre de dispositions possibles distinctes si les femmes sont obligées de s'asséoir est $A_5^3 \times A_7^2 = 2520$.

8

Un sac contient 9 jetons identiques numérotés de 1,2,..., 9.

1- On extrait au hasard successivement trois jetons on remet chaque fois le jeton tiré. Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés. On écrit les chiffres obtenus cote à cote dans l'ordre de tirage on obtient un nombre de trois chiffres.

- Combien y-a-t-il de nombres possibles qu'on peut former ?

2- On extrait au hasard successivement et sans remise trois jetons du sac, et on écrit les chiffres obtenus cote à cote dans l'ordre de tirage. Combien y-a-t-il de nombres possibles qu'on peut former ?

3- On extrait simultanément 3 jetons du sac.

- Combien y-a-t-il de résultats possibles

Rép :

1- Lorsqu'on extrait successivement et avec remis de des jetons du sac, alors chaque résultat est l arrangement de répétition de trois éléments parmi 9. Donc le nombre de possibilités qu'on cherche est $9^3 = 279$.

2- Lorsque'on extrait successivement et sans remis des jetons du sac, alors chaque résultat est l arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 9. Donc le nombre chercher est $A_9^3 = 504$.

3- Lorsqu'on extrait simultanément 3 jetons du sac; chaque résultat est une combinaison de 3 éléments parmi 9, donc le nombre cherché est $C_9^3 = 84$

9

Une boite contient 4 boules blanches et 3 boules rouges (indiscernable au toucher), on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de la boite.

1- Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?

2- Montrer que la probabilité pour obtenir trois boules de même couleur est $\frac{1}{7}$.

3- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Rép :

L'ordre intervient et pas de répétition, donc le nombre de tirages possibles est le nombre d'arrangement sans répétition de trois boules parmi 7.

Càd : $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

1- Soit A l'événement : "Avoir 3 boules blanches".

On a $\text{Card}A = A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

Donc $p(A) = \frac{\text{Card}A}{210} = \frac{24}{210} = \frac{8}{70} = \frac{4}{35}$

Scanné avec CamScanner

2- Pour avoir 3 boules de même couleur il suffit de trirer :

3 Boules blanche ou 3 boules rouges. Si on note cet événement par B.

On obtient: $\text{card}B = A_4^3 + A_3^3 = 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2$

$= 24 + 6 = 30$

D'où le probabilité demandé est :

$$p(B) = \frac{\text{Card } B}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

3- Soit C l'événement: "Obtenir au moins une boule blanche".

$\overline{C}$ est l'événement contraire de C : "n'obtenir aucune boule blanche".

Donc $\text{card } \overline{C} = A_3^3 = 3 \times 2 = 6$

D'où : $P(\overline{C}) = \frac{\text{Card } \overline{C}}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$

Par conséquent $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$

10

Un sac contient neuf jetons (indiscernable au toucher), deux blanches portent le nombre 1 et trois rouges portent les nombres 1; 2; 2 et 4 noires portent les nombres 1, 1, 2, 2.

On tire au hasard et simultanément 3 jetons du sac.

1- Calculer la probabilité des événements suivants :

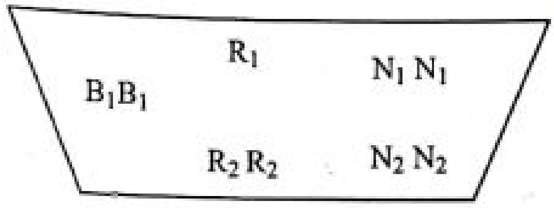
* A : "Les trois jetons tirés sont de couleur différentes". Un jeton de chaque couleur).

* B : "Les trois jetons tirés portent le même nombre".

* C: "Parmi les jetons tirés il existe au moins un rouge".

2- Calculer la probabilité de l'événement: $A \cap B$

Rép :



Soit Ω l'invers des possibilités.

Le tirage est simultané donc $\text{card}\Omega = C_9^3 = 84$

* Calcul de la probabilité de A.

L'évenement A est réalisé si on tire un jeton blanc; un jeton rouge et un jeton noir (on s'intéresse pas au nombre).

Donc $\text{card } A = C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 = 24$

D'où : $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card}\Omega} = \frac{2}{7}$

* Calcul de la probabilité de B.

L'évenement A est réalisé si on obtient trois jetons portants le même nombre 1 ou trois jetons portants le nombre 2 (on n'intéresse pas au couleur).

Donc $\text{card}B = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14$

$$p(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card}\Omega} = \frac{1}{6}$$

Calcul de la probabilité de l'événement C :

Pour calculer la probabilité de C on peut calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{C}$.

« N'avoir aucun jeton rouge ».

Donc $\text{card } \overline{C} = C_6^3 = \frac{6.5.4}{6} = 20$

Donc $p(\overline{C}) = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$

Et on sait que : $p(C) = 1 - p(\overline{C})$

D'où : $p(C) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

2- La probabilité de l'événement $A \cap B$

On a : $A \cap B$ est l'événement : « obtenir 3 jetons de couleur différentes deux à deux et portent le même nombre $A \cap B = \{\{B_1, R_1, N_1\}\}$

Càd $\text{card } A \cap B = C_2^1 . C_1^1 . C_2^1 = 4$

D'où : $p(A \cap B) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

Scanné avec CamScanner

11

Une boite contient 3 boules blanches et sept boules noires (indiscernables au toucher).

1- On tire au hasard et simultanément deux boules de la boite et soient A et B les événements suivants :

*A : « Les deux boules tirés sont noires ».

*B : «Parmi les deux boules tirés il existe au moins une blanche»

a- Montrer que la probabilité de A est $\frac{7}{15}$ Et que la probabilité de B est $\frac{8}{15}$.

2- On considère l'expérience aléatoire suivante :

- Si elle est blanche ou s'arrête de tirer.
- Si elle est noire on la pose à côté puis on tire une deuxième et une dernière de la boite.

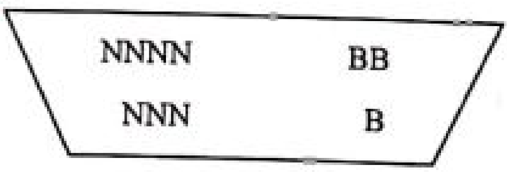
Soient C et D les deux événements suivants:

* C : «Obtenir une boule blanche au premier tirage ».
* D : « Obtenir une boule blanche ».

a- Calculer la probabilité de l'événement C.

b- Montrer que la probabilité de l'événement D est $\frac{8}{15}$.

Rép :



1- Soit Ω l'univers des possibles

On a : $\text{card}\Omega = C_{10}^2 = 45$

*Calcul de la probabilité de l'événement A :

L'événement A sera réalisé lorsqu'on obtient deux boules noires.

On a : $\text{card}A = C_7^2 = 21$

Donc $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card}\Omega} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

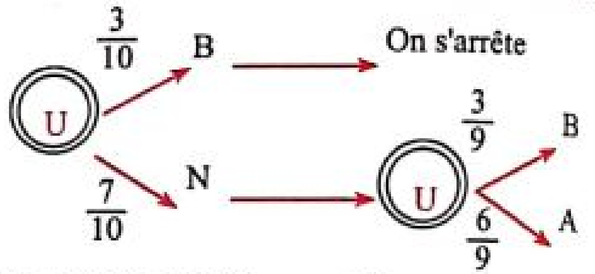
*Calcul de la probabilité de l'événement B.

L'événement B sera réalisé lorsqu'on obtient exactement une boule blanche ou lorsqu'on obtient deux boules blanches.

Donc $\text{card}B = C_3^1 . C_7^1 + C_3^2 = 24$

D'où $p(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card}\Omega} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

2- Traduisons l'expérience par la figure suivante :



* Probabilité de l'événement C :

L'événement C sera réalisé lorsqu'on obtient au premier tirage une boule blanche càd

U $\longrightarrow$ B (voir figure).

D'où : $p(C) = \frac{3}{10}$

* Probabilité de l'événement D :

L'événement D sera réalisé lorsqu'on obtient une boule blanche au premier tirage ou lorsqu'on obtient une boule blanche au deuxième tirage.

Càd : U $\longrightarrow$ B ou U $\longrightarrow$ N $\longrightarrow$ B

D'où $p(D) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$

$P(D) = \frac{3}{10} + \frac{7}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

12

Une boite U_1 contient deux jetons portent le nombre 1 et quatre jetons portent le nombre 2 (Indiscernables au toucher), et une boite U_2 contient trois boules rouges et quatre boules vertes (Indiscernables au toucher). On tire au hasard un jeton de la boite U_1.

Scanné avec CamScanner

1- Calculer la probabilité des événements suivants :

*A : « Le jeton tiré porte le nombre 1 »

* B : « Le jeton tiré porte le nombre 2 »

2 - On considère dans cette question l'expérience aléatoire suivante:

On tire un jeton de la boite U_1 et on note son numéro.

- Si ce nombre est 1 on tire une boule de la boite U_2.

- Si ce nombre est 2 on tire simultanément deux boules de la boite U_2.

Soit n le nombre des boules rouges tirées de la boite U_2 et E_n l'événement : « Obtenir exactement n boules rouges ».

- Montrer que : $p(E_1) = \frac{11}{21}$ et $p(E_2) = \frac{2}{21}$

- Calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement E_1 est réalisé.

Rép :

(Une boite U_1)

Soit Ω_1 l'univers des possibilités

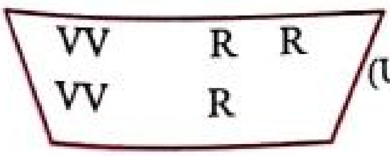
On a : $\text{card}\Omega_1 = C_6^1 = 6$

* Probabilité de l'événement A :

On a : $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card}\Omega_1} = \frac{C_2^1}{6} = \frac{1}{3}$

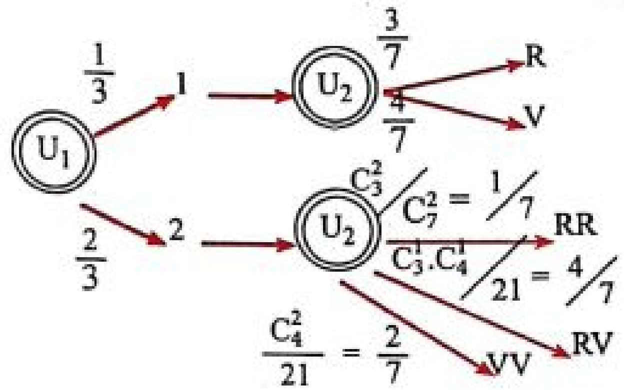
* Probabilité de l'événement B :

On a : $p(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card}\Omega_1} = \frac{C_4^1}{6} = \frac{2}{3}$



(Une boite U_2)

La figure suivante représente l'expérience.



a- * E_1 est l'événement : «Obtenir exactement une boule rouge». E1 est vérifié lorsqu'on a :

$U_1 \rightarrow 1 \rightarrow U_1 \rightarrow R$

ou

$U_1 \rightarrow 2 \rightarrow U_2 \rightarrow RV$

Donc $p(E_1) = \frac{1}{3}.\frac{3}{7} + \frac{2}{3}.\frac{4}{7} = \frac{11}{21}$

* E_2 est l'événement : « Obtenir exactement deux boules rouges

Càd $U_1 \rightarrow 2 \rightarrow U_2 \rightarrow RR$

D'où : $p(E_2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

b- Dans cette question on a une probabilité conditionnelle.

on a : $p_{E_1}(A) = \frac{p(A \cap E_1)}{p(E_1)}$

E_1 est l'événement obtenir une boule qui porte 1

U_1 Et une boule rouge de U_2 càd :

$U_1 \rightarrow 1 \rightarrow U_2 \rightarrow R$

Donc : $p(A \cap E_1) = \frac{1}{3}.\frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

On a : $p(E_1) = \frac{11}{21}$

D'où : $p_{E_1}(A) = \frac{1}{7}.\frac{21}{11} = \frac{3}{11}$

Scanné avec CamScanner

13

Une boite contient 6 boules indiscernable au toucher, portent les nombres -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1 et 2.

On considère l'expérience suivante : On tire au hasard est simultanément trois boules de la boite.

1- On considère les deux événements suivants :

*A : « Parmi les boules tirées il existe au moins une boule qui porte le nombre 1».

*S : « La somme des nombres inscrit sur les boules tirées est nulle »

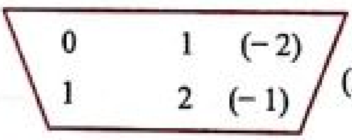
a- Calculer la probabilité de l'événement A.

b- Montrer que la probabilité de l'événement S est : $\frac{1}{5}$

2- Répétons l'expérience précédente quatre fois de la suite (on remis dans chaque tirage les boules tirées à la boite).

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement S ?

Rép :



(La boite)

Soit Ω l'univers des possibles.

On a : $\text{card}\Omega = C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$

1-a- Calculer de la probabilité de l'événement A.

L'événement A sera réaliser lorsqu'on obtient exactement une boule porte 1 ou lorsqu'on obtient exactement 2 boules portent 1.

Donc $\text{CardA} = C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 = 16$

D'où : $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card}\Omega_1} = \frac{4}{5}$

b- Montrer que $p(S) = \frac{1}{5}$

L'événement S sera réalisé lorsqu'on obtient :

$(1)(0)(-1)$ ou $(2)(0)(-2)$ ou $(1)(1)(-2)$

D'où : $\text{CardS} = C_1^1\, C_1^1.C_2^1 + C_1^1.C_1^1.C_1^1 + C_2^2.C_1^1$

Donc : $\text{CardS} = 4$ càd $p(S) = \frac{\text{Card } S}{\text{Card}\Omega_1} = \frac{1}{5}$

2-Soit B l'événement : « obtenir exactement 3 fois l'événement S »

On a $p(S) = C_4^3.(p(S))^3.(1-p(S))'$

$$P(B) = 4.\left(\frac{1}{5}\right)^3.\frac{4}{5} = \frac{16}{5^4} = \frac{16}{625}$$

14

Une boite contient 9 jetons : quatre jetons blancs et trois jetons noires et 2 jetons verts (Indiscernable au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois jetons de la boite.

1- Considérons les événements :

A : «obtenir trois jetons de même couleur».

B : « obtenir trois jetons de couleur différents deux à deux.

- Montrer que $P(A) = \frac{5}{84}$ et $P(B) = \frac{2}{7}$

2- Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de jetons noires obtenus.

a- Vérifier que les valeurs prise par X sont 0 ; 1 ; 2 et 3.

b- Montrer que $P(X=2) = \frac{3}{14}$ et $P(X=1) = \frac{15}{28}$

c- Donner la loi de la variable réelle X.

Rép :

Comme le tirage est au hasard et simultané alors on va utiliser C_n^p

- Pour la réalisation de l'événement A on tire 3 jetons blanches ou trois boules noires donc on trouve

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{C_4^1 + 1}{\frac{9!}{3!6!}}$$

$$= 5\cdot\frac{\cancel{3}\times\cancel{2}}{\cancel{9}3\times\cancel{8}4\times 7}=\frac{5}{3.4.7}$$

Càd : $P(A)=\frac{5}{84}$

Pour la réalisation de l'événement B on tire une boule de chaque couleur donc on trouve:

$$P(B)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1}{C_9^3}=\frac{4.3.2}{\frac{9!}{3!6!}}=\frac{\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{3}.2}{\cancel{9}\times\cancel{8}\times 7}=\frac{2}{7}$$

2- a- Comme il y a 3 jetons noires et on tire 3 jetons de la boite, alors on peut trouver 0 jetons noire, ou on a exactement un jeton noire ou exactement deux jetons noires ou exactement trois jetons noire par conséquent : $X(\Omega)=\{0, 1, 2, 3\}$

b- L'événement $(X=2)$ est : « obtenir exactement 2 noires et un jeton blanc ou vert » donc :

$$P(X=2)=\frac{Card\ (X=2)}{Card\ (\Omega)}=\frac{C_3^2\ .C_6^1}{C_9^3}$$

$$=\frac{3.6}{\frac{9!}{3!6!}}=\frac{\cancel{3}.\cancel{6}3.\cancel{3}.\cancel{2}}{\cancel{9}.\cancel{8}2\ .\ 7}=\frac{3}{14}$$

- L'événement $(X = 1)$ est : « obtenir exactement une boule noire et deux boules non noire » donc :

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\ .C_6^2}{C_9^3}$$

Et comme $C_6^2=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6.5.4!}{2\times 1\times 4!}=15$

et $C_9^3=\frac{9!}{3!6!}=\frac{\cancel{9}3.\cancel{8}4.7.\cancel{6!}}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{6!}}$

Alors $P(X=1)=\frac{\cancel{3}.15}{\cancel{3}.4.7}=\frac{15}{28}$

- L'événement $(X=0)$ est : «n'obtenir aucune boule noire»

$$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{\frac{6!}{3!3!}}{\frac{9!}{3!6!}}=\frac{\cancel{6}2.5.\cancel{4}}{\cancel{3}.\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3}\cancel{2}}{\cancel{9}3,\cancel{8}2.7}$$

$$=\frac{\cancel{2}.5}{3.\cancel{2}.7}=\frac{5}{21}$$

- L'événement $(X = 3)$ est : « obtenir exactement 3 noires »

$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{\frac{9!}{3!6!}}=\frac{\cancel{3}\cancel{2}}{\cancel{9}3,\cancel{8}4.7}=\frac{1}{84}$$

On résume la probabilité dans le tableau suivant :

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

15

Une boite contient 9 jetons (Indiscernable au toucher) et portent les nombres : 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1.

1- On tire au hasard et simultanément deux jetons de la boite.

Soit A l'événement : "La somme des deux nombres porté par les deux jetons tirés est 1".

1- Montrer que : $p(A)=\frac{5}{9}$

2- Considérons le jeu suivant : Said tire au hasard et simultanément deux jetons de la boite; et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portants chacun le nombre 1.

a- Montrer que la probabilité de gain de Said est $\frac{1}{6}$.

b- Said jeu le jeux précédent trois fois de suite (Said remet les deux jetons tirés après chaque tirage)

- Quelle est la probabilité pour que Said gagne deux fois exactement?

Rép :

Soit Ω l'univers des possibiliés.

$$Card\Omega=C_9^2=36$$

1- l'événement A est réalisé si on obtient 0 ; 1

D'où : $CardA=C_4^1\cdot C_5^1=20$

Donc $p(A)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

On a : $p(B)=\frac{Card\ B}{Card\Omega}=\frac{C_4^2}{36}$

$$=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

b- Soit C l'événement "Said gagne exactement deux fois " $p(C) = C_3^2\,(p(C))^2\,(1 - p(B))$

$$= 3.\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

16

Pour la détérmination de deux questions d'un concours oral pour une fonction. Le condidat tire au hasard et successivement sans remise dans une boite contenant 10 cartes : 8 cartes de mathématiques, 2 cartes de Français (Indiscernable au toucher).

1- Considérons l'événement A : tirer deux cartes de Français B : tirer deux cartes de mathématiques.

- Montrer que $p(A) = \frac{1}{45}$ et $p(B) = \frac{16}{45}$

2- Soit X la variable réelle qui associe à chaque tirage le nombre de cartes de français.

a- Vérifier que les valeurs prises pour X sont 0; 1 et 2.

b- Montrer que $p(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de X.

Rép :

Soit Ω l'univers des possibiliés.

On a : $Card\Omega = A_{10}^2 = 90$

1- * Probabilité de l'événement A :

On a : $CardA = A_2^2 = 2$

D'où : $p(A) = \frac{Card\ A}{Card\Omega} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

* Probabilité de l'événement B :

On a : $CardB = 2.\ A_2^1\ .\ A_8^1 = 32$

D'où : $p(B) = \frac{Card\ B}{Card\Omega} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$

2- a- Valeur X :

Valeur de X	Nature des éventualités
0	deux cartes de mathématiques
1	deux cartes de différents diplômes
2	deux cartes de Français

D'où : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

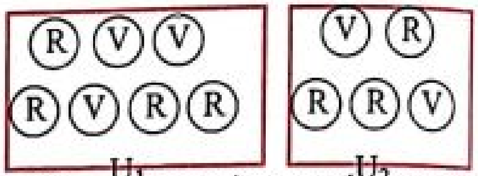
b- $p(X = 0) = \frac{A_8^2}{90} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$

$p(X = 1) = p(B) = \frac{16}{45}$

$p(X = 2) = p(A) = \frac{1}{45}$

17

Une urne U_1 contient 7 boules: quatre boules rouges et trois boules vertes (indiscernable au toucher), et une urne U_2 contient 5 boules: trois boules rouges et deux boules vertes (indiscernable au toucher).



I- Considérons l'experience suivante: On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne U_1.

Soit A l'événement :

"obtenir exactement une boule rouge et deux boules vertes", et B l'événement: "obtenir trois boules de la même couleur".

- Montrer que $p(A) = \frac{12}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{7}$

II- Considérons l'experience suivante : on tire au hasard et simultanément deux boules de U_1 puis on ntire au hasard une seule boule de U_2.

Soit C l'événement "obtenir trois boules rouges".

- Montrer que $p(C) = \frac{6}{35}$

Rép :

Soit Ω l'univers des possibiliés.

On a : $Card\Omega = C_7^3 = \frac{7.6.5}{6} = 35$

et on a $CardA = C_4^1.C_3^2 = 12$

Donc $p(A) = \frac{Card\ A}{Card\Omega} = \frac{12}{35}$

Puis on a : $CardB = C_4^3 + C_3^3 = 5$

D'où : $p(B) = \frac{Card\ B}{Card\Omega} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

II- Soit Ω' l'ensemble des résultats possibles :

On a : $Card\Omega' = C_7^2 \times C_5^1 = \frac{7.6}{2} \times 5 = 105$

et on a : $CardC = C_4^2.C_3^1 = 18$

Donc : $p(C) = \frac{Card\ C}{Card\Omega'} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}$

18

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges et 3 boules vertes et deux boules blanches (indiscernable au toucher).

On tire au hasard et successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1- Considérons l'événement A: "obtenir au moins une boule blanche" et B l'événement "obtenir deux boules de même couleur ".

- Montrer que $p(A)=\frac{13}{28}$ et $p(B)=\frac{1}{4}$

2- Soit X la variable réelle définie par le nombre de boules blanches obtenues.

a- Montrer que $p(X=2)=\frac{1}{28}$

b- Déterminer la loi de probabilité de la variable réelle X et calculer son espérance mathématique E(X).

Rép :

Soit Ω l'univers des possibiliés.

$$\text{Card}\Omega = A_8^2 = 8.7 = 56$$

1- * Probabilité de l'événement A :

$\overline{A}$ est l'événement : "n'obtenir aucune boule blanche"

On a $\text{Card}\,\overline{A} = A_6^2 = 30$

D'où : $p(\overline{A}) = \frac{30}{36} = \frac{15}{28}$

Donc : $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \frac{13}{28}$

- * Probabilité de l'événement B :

$$\text{Card}B = A_3^2 + A_3^2 + A_2^2 = 14$$

Donc : $p(B) = \frac{14}{56} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

2- a- $P(X=2) = \frac{A_2^2}{56} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$

b- $P(X=0) = \frac{A_6^2}{56} = \frac{15}{28}$

$$P(X=1) = \frac{2 \times A_2^1 \times A_6^1}{56} = \frac{3}{7}$$

* Espérence mathématique :

$$E(X) = 0.p(X=0) + 1.p(X=1) + 2.p(X=2)$$

$$= \frac{3}{7} + \frac{2}{28} = \frac{6}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$$

19

Une urne contient cinq jetons: deux blancs et deux verts et un jeton rouge (indiscernable au toucher).

On tire au hasard et successivement avec remise trois jetons de la boite.

1- Soit A l'événement : "Les trois jetons tirés ont même couleur ".

- Montrer que $p(A)=\frac{17}{125}$

2- Soit X la variable réelle définie par le nombre de jetons blanches tirées.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable réelle.

Rép :

Soit Ω l'univers des possibiliés.

Comme le tirage est successive et avec remise alors chaque tirage est un arrangement avec répétition.

D'où $\text{Card}\Omega = 5^3 = 125$

- Probabilité de l'événement A :

On a $A = \{BBB; VVV; RRR\}$

D'où : $\text{Card}A = 2^3 + 2^3 + 1^3 = 17$

Donc $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card}\Omega} = \frac{17}{125}$

2- * Valeur de X :

Valeur de X	Nature du tirage
0	$\overline{B}\ \overline{B}\ \overline{B}$
1	$\overline{B}\ \overline{B}\ B$
2	$\overline{B}\ B\ B$
3	$B\ B\ B$

D'où : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

* La loi de probabilité de X :

$$p(X=0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$p(X=1) = \frac{3.2^1.3^2}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p(X=2) = \frac{3.2^2.3^1}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p(X=3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

On vérifie que

$$p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = 1$$

Scanné avec CamScanner

Modèles de concours avec solutions

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine épreuve de Maths

2017 – 2018 (Oujda)

Question 1

- On pose : $A = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$, $B = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$
- Et on considère le complexe $Z = A + iB$. Z est égale :

A - $Z = 0$ B - $Z = -2i$	C - $Z = \frac{1}{2}$ D - $Z = 2i$	E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 2

- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\ln(x^2 - 2x + 2)$

A - Domaine de définition de f est : $\mathbb{R}^+$ B - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$	C - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ D - $f''(x) = \frac{x(4-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$	E - $\lim_{x\to 0} f(x) = \ln 2$.

Question 3

- On considère les deux intégrales : $I = \int_0^1 5e^t \cos(2t)\,dt$ et $J = 5\int_0^1 e^t \sin(2t)\,dt$.

A - $2J - I = e\cos(2) - 1$ B - $2I + J = 1 - e\sin(2)$	C - $J = 2 + e\sin(2) - 2e\cos(2)$ D - $I = 2 + e\cos(2) - 2\sin(2)$	E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 4

- Si f est une fonction définie en a ; alors :

A - f est continue en a. B - $\ln(f)$ est définie en a.	C - $\frac{1}{f}$ est définie en a. D - $\frac{1}{e^f}$ est définie en a.	E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 5

- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{V})$. On considère les deux points A et B d'affixes respectives $Z_A = 1$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit C le symétrique du point B par rapport à l'axe des abscisses.

A - L'affixe Z_C de C est : $Z_C = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{e}}{2}$	B - ABC est un triangle équilatéral C - Le module : $\lvert Z_B - Z_A \rvert = \sqrt{2}$	D - Le triangle ABC est isocèle E - L'affixe Z_C de C est : $Z_C = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Scanné avec CamScanner

Question 6

- Choisissez la réponse juste :

A - La solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 8y = 0$ telle que : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est : $y(x) = e^{-2x} + 2e^{4x}$ **B -** Le nombre $(e^{i\theta})^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est égal à : $\cos(\theta^m) + i\sin(\theta^m)$	**C -** Le nombre $(e^{i\theta})^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est égal à : $m[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ **D -** L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$ est une sphère.	**E -** L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$ est vide.

Question 7

- On considère la fonction f_n telle que : $f_n(x) = nxe^{-nx}$ avec $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$; $n \geq 1$. Soit (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

A - $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ **B -** $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$	**C -** $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = n$ **D -** $f_n'(x) = ne^{-nx}(nx - 1)$	**E -** Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 8

- On prend les données de la question 07.

A - (C_n) admet une asymptote d'équation $y = 1$ **B -** (C_n) admet une asymptote d'équation $y = e$.	**C -** f_n admet une valeur maximale au point $\left(\frac{1}{e} ; \frac{1}{n}\right)$ **D -** f_n admet une valeur maximale au point $\left(\frac{1}{e} ; \frac{1}{n}\right)$	**E -** fn admet une valeur maximale au point $\left(\frac{1}{e} ; -\frac{1}{n}\right)$

Question 9

- On prend les données de la question 07.

On note (C_1) et (C_2) les courbes respectivement de f_1 et f_2 ($n = 1$ et $n = 2$).

A - Les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en deux points P et Q d'abscisses respectives : $p = e^2$ et $q = \ln 4$ **B -** Dans l'intervalle $]\ln 2 ; +\infty[$ (C_2) est au-dessous de (C_1)	**C -** (C_1) et (C_2) ne se coupent pas **D -** Dans l'intervalle $]0 ; \ln 2[$ (C_2) est au-dessous de (C_1).	**E -** (C_1) et (C_2) se coupent en deux points P et Q d'abscisses respectives : $p = e^2$ et $q = e$.

Question 10

- On prend toujours les données de la question 07. La surface du domaine plan délimité par (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives : $x = 0$ et $x = \ln 2$ est :

A. $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ **B.** $\ln 2 - 1$	**C.** $1 - \ln 2$ **D.** $\frac{\ln 2}{2}$	**E.** Toutes les réponses proposées sont fausses.

Scanné avec CamScanner

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Médecine et Pharmacie

2017 - 2018 (Oujda)

Question 1

$Z = A + Bi$

- Avec : $A = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \dots\dots + \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

$B = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \dots\dots + \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

- Donc : $Z = \sum_{k=0}^{9} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right]$

$= \sum_{k=0}^{9} e^{ik\frac{\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{9} \left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^k$

$= \frac{1 - e^{i\frac{10\pi}{5}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = 0$

- D'où :

A - Vraie ; B - fausse ; C - fausse ;
D - fausse ; E - fausse.

Question 2

- On a : $f(x) = 2\ln(x^2 - 2x + 2)$

A - $Df = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 2 > 0 \}$ et $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$.

- D'où : $Df = \mathbb{R}$; par la suite : **A est fausse.**

B - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty$

(Car : $\lim (x^2 - 2x + 2) = \lim x^2 = +\infty$)

- D'où : **B - est fausse**

C - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{\ln\left[x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right]}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(2\,\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right) = 0$

- D'où : **C est vraie**

D - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables est on a :

$f'(x) = \frac{2\,(x^2 - 2x + 2)'}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2\,(2x - 2)}{x^2 - 2x + 2}$

$= \frac{4\,(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$

Et $f''(x) = 4 \cdot \frac{(x^2 - 2x + 2) - (x-1)(2x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

$= 4 \cdot \frac{x^2 - 2x + 2 - 2x^2 + 2x + 2x - 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

$= 4 \cdot \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 2x^2 + 2)^2} = \frac{4x(1-x)}{[(x-1)^2 + 1]^2}$

- D'où : **D est fausse.**

E - $\lim_{x\to 0} f(x) = 4\ln(2)$

- D'où : **E est fausse.**

Question 3

A - $2J - I = 10 \int_0^1 e^t \sin(2t)\,dt - \int_0^1 5\,e^t \cos(2t)\,dt$

$= 5 \int_0^1 [2\,e^t \sin(2t) - e^t \cos(2t)]\,dt$

$= -5 \int_0^1 [e^t \cos(2t) - 2\,e^t \sin(2t)]\,dt$

$= -5\,[e^t \cos(2t)]_0^1 = -5\,(e\cos(2) - 1)$

$= 5 - 5e\cos(2)$

- D'où : **A est fausse.**

B - $2I + J = 2 \int_0^1 5\,e^t \cos(2t)\,dt + 5 \int_0^1 e^t \sin(2t)\,dt$

$= 5 \int_0^1 [e^t \sin(2t) + 2\,e^t \cos(2t)]\,dt$

$= 5\,[e^t \sin(2t)]_0^1 = 5\,(e\sin(2) - 0)$

$= 5\,e\sin(2)$

- D'où : **B est fausse.**

Scanné avec CamScanner

C - On a : $2\times$ $2J - I = 5 - 5e\cos(2)$
$J + 2I = 5e\sin(2)$

- D'où : $5J = 10 - 10e\cos(2) + 5e\sin(2)$
$= 5(2 - 2e\cos(2) + e\sin(2))$.
- Donc : $J = 2 - 2e\cos(2) + e\sin(2)$

Par suite : $\boxed{\text{C est vraie}}$

D - On a : $2J - I = 5 - 5e\cos(2)$
et : $J = 2 - 2e\cos(2) + e\sin(2)$

- Donc : $I = 2J - 5 + 5e\cos(2)$

$I = 4 - 4e\cos(2) + 2e\sin(2) - 5 + 5e\cos(2)$

- D'où : $I = e\cos(2) + 2e\sin(2) - 1$
- Donc : $\boxed{\text{D est fausse.}}$

E - $\boxed{\text{E est fausse.}}$

Question 4

Supposons que f est définie en a.

A - fausse ; car il peut que : $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

B - fausse ; car il peut que : $f(a) \leq 0$

C - fausse ; car il peut que : $f(a) = 0$

D - vraie ; car $e^{f(x)} \neq 0$ $(\forall x \in Df)$

E - fausse.

Question 5

A - Puisque C est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses, alors :

$Z_C = \overline{Z}B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où : $\boxed{\text{A est fausse.}}$

B - On a : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

$= \frac{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

- Donc : $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Par la suite ABC est équilatéral

- D'où : $\boxed{\text{B est vraie}}$

C - $|Z_B - Z_A| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

D'où : $\boxed{\text{C - est fausse.}}$

D - Vraie ; car un triangle équilatéral est en particulier isocèle en A, en B et en C.

E - $\boxed{\text{E est fausse.}}$; car $Z_C = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 6

A - On a : $y'' - 2y' - 8y = 0$

On considère l'équation caractéristique liée à cette équation : $r^2 - 2r - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

$r_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ et $r_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

- D'où la solution générale est : $y(x) = ae^{-2x} + be^{4x}$

$y'(x) = -2ae^{-2x} + 4be^{4x}$

- D'où : $y(0) = 1 \iff a + b = 1$
$y'(0) = 2 \iff -2a + 4b = 2$

Par la suite : $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 1 \end{cases}$

- Donc : $3b = 2 \iff b = \frac{2}{3}$
$a = 1 - b = \frac{1}{3}$
- D'où : $y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{4x}$
- Donc : $\boxed{\text{A - est fausse.}}$

B - On a : $(\forall m \in \mathbb{N}) ; (\forall \theta \in \mathbb{R}) ; (e^{i\theta})^m = (\cos\theta + i\sin\theta)^m$
$= \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$

- D'où : $\boxed{\text{B est fausse.}}$

C - $\boxed{\text{C est fausse.}}$; car (voir B)

D - $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$

$\iff (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + z^2 + 2z) + 3 = 0$

$\iff (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z+1)^2 - 1 + 3 = 0$

$\iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$

- D'où l'ensemble de points $M(x, y, z)$ est une sphère de centre Ω (1, -2, -1) et de rayon $r = \sqrt{3}$.

• D'où : D - est vraie

E - E - est fausse. car (voir D).

Question 7

• On a : $f_n(x) = nx\,e^{-nx}$; ($n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$)

A - $\lim f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} nx\,e^{-nx} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^{nx}}{nx}} = 0$

• D'où : A est fausse.

B est fausse. ; (voir A).

C est fausse. ; (voir A).

D - $f_n'(x) = ne^{-nx} - n^2x\,e^{-nx}$

$= ne^{-nx}(1 - nx)$

• D'où : D est fausse.

E - E est vraie

Question 8

A - On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$; donc (C_n) admet une asymptote d'équation y = 0 au voisinage de $+\infty$.

Et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} nx\,e^{-nx} = -\infty$

• D'où : A est fausse.

B - B est fausse. ; (voir A).

C - On a : $f'_n(x) = n\,e^{-nx}(1 - nx)$

• D'où : $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n}$

Par la suite le tableau de variation de f_n est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{x}$	$+\infty$
$f_x'(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	↗	$f_n\left(\frac{1}{x}\right)$	↘

$f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n\left(\dfrac{1}{n}\right) e^{-n}\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

D'où f_n admet une valeur maximale au point $\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{e}\right)$

D'où : C est fausse.

D - est vraie

D - est fausse. ; (voir C).

Question 9

A - On a : $f_1(x) = x\,e^{-x}$ et $f_2(x) = 2x\,e^{-2x}$

x	$-\infty$		0		ln(2)		$+\infty$
$f_1(x) - f_2(x)$		+	0	-	0	+	
Position relative de (C_1) et (C_2)		(C_1) au dessus de (C_2)	(C_1) coupe (C_2) en O(0,0)	(C_1) au dessous de (C_2)	(C_1) coupe (C_2) en $\left(\ln_2;\left(\frac{\ln_2}{2}\right)\right)$	(C_1) et au dessus de (C_2)	

d'où A - est fausse

B - vraie ; (voir A)

C - fausse ; (voir A)

D - fausse ; (voir A)

E - fausse ; (voir A).

Question 10

La surface demandée est :

$\lambda = \displaystyle\int_0^{\ln_2} |f_1(x)|\,dx$ (u.a)

$= \displaystyle\int_0^{\ln_2} |x\,e^{-x}|\,dx$ (u.a) ; ($x \geq 0$)

$= \displaystyle\int_0^{\ln_2} x\,e^{-x}\,dx$ (u.a)

$= \left([-x\,e^{-x}]_0^{\ln_2} + \displaystyle\int_0^{\ln_2} e^{-x}\,dx\right)$ (u a) (Intégration par parties)

$= [-x - 1)\,e^{-x}]_0^{\ln_2}$ (u.a)

$= \left(\dfrac{1}{2}(-\ln 2 - 1) + 1\right)$ (u.a)

• D'où : $\lambda = (\dfrac{1}{2}(1 - \ln 2)$ (u.a).

• Par la suite :

A - fausse.

B - fausse.

C - fausse.

D - fausse.

E - vraie.

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine et Pharmacie

2016 - 2017 (Oujda)

Question 1

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; On considère la suite $(V_n)n$ définie par $V_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)$, et on considère le complexe : $Z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

A - $V = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 1 + i.\tan(\frac{\pi}{2n})$	C - $V_n = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$	E - $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V_n}{n} = 0$
B - $V = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 1 + i.\cos(\frac{\pi}{2n})$	D - $V_n = \tan(\frac{\pi}{2n})$	

Question 2

- On pose : $S = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $Sn = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

A - $S_n = 1 + \frac{1}{(n+1)}$	C - $V_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$	E - Toutes les réponses proposées sont fausses
B - S est divergente	D - $V_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$	

Question 3

- On considère la suite numérique (Un)n telle que :

$U_0 = e^2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = (1 + U_n)\, e^{-2} - 1$; On pose : $V_n = 3\,(1 + U_n)$

A - $(U_n)_n$ croissante	C - $U_n = e^{2n+2} - 1$	E - $\ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_n = (n+1)(2 - n + \ln 3)$
B - $(U_n)_n$ est arithmétique	D - $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = -1$	

Question 4

- On Considère la fonction f telle que : $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(1+x)}{x+1}$ et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

A - Domaine de définition de f est : $[-1, +\infty[$	C - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +1$	E - $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$
B - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$	D - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1.$	

Question 5

- On prend les données de la question (4).

A - La solution de l'équation $f(x) = x$ est : $x = 1 - \sqrt{e}$.	C - Dans l'intervalle $]\sqrt{e} - 1, +\infty[$ On a : $f(x) - x \leq 0$	D - La droite d'équation : $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ est tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = \sqrt{e^3} - 1$
B - Dans l'intervalle $]-1; -1 + \sqrt{e}]$ On a : $f(x) - x \geq 0$		E - Toutes les réponses proposées sont fausses

Scanné avec CamScanner

Question 6

- Dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points : $A(-1, 2, 0)$; $B(3, 0, 4)$ et $C(-2, 1, 2)$

A . La surface du triangle ABC est $5\sqrt{2}$. B . La surface du triangle ABC est $5\sqrt{3}$.	C . La longueur de hauteur issue de A dans le triangle ABC est $\sqrt{5}$. D . Langueur de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $\sqrt{6}$.	E . Les points A, B et C sont alignés.

Question 7

- Choisissez la réponse juste.

A . Le périmètre du cercle de rayon R est πR. B . Le complexe $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est égal à $i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.	C . Parmi 9 personnes ; on peut choisir un comité contenant 5 personnes de 256 façons différentes.	D . Le hectare est une unité de longueur. E . Toutes les réponses proposées sont fausses..

Question 8

- Soient : $J = \int_0^{-a} \cos^3(2t)\,dt$ et $I = 2.\int_0^{-a} (\tan^3(x) + \tan x)\,dx$.

A . $I = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 a}$. B . $I = 2 - \dfrac{1}{\cos^2 a}$.	C . $J = \sin a . \left(\dfrac{\cos a . \sin^2 2a}{3} + \cos a\right)$. D . $J = \dfrac{\sin a}{2} . \left(\dfrac{\cos a . \sin^2 2a}{3} + \cos a\right)$.	E . Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 9

- Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$; $I_n = 2 . \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n .\cos x.dx$

A . $I_0 = -1$. B . $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.	C . $I_{n+2} = (\frac{\pi}{2})^{n+1} + (n+1)\,I_n$. D . $I_{n+2} = (\frac{\pi}{2})^{n+2} - (n+1)(n+2)\,I_n$.	E . $I_2 = 2 - \dfrac{\pi^2}{4}$.

Question 10

- Choisissez la réponse juste.

A . $\cos^2\dfrac{3\pi}{12} + \cos^2\dfrac{5\pi}{12} + \cos^2\dfrac{9\pi}{12} + \cos^2\dfrac{11\pi}{12} = 3$. B . Le point I(2,0) est un centre de symétrie pour la courbe qui représente la fonction : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.	C . $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos^2 x$ D . la periode de la fonction $f(x) = 1 - 8\cos x - 4\cos^2 x$	E . La propriété suivante $(gof)' = f'.g'(f)$ est fausse.

Scanné avec CamScanner

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Médecine et Pharmacie

2016 - 2017 (Oujda)

Question 1

- On a : $Vn = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)$
- On pose : $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

A - fausse ; car : $V = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$

$= \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{1-\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}}$

$= \frac{2}{2\sin^2\frac{\pi}{2n} - 2i\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

$= 1 + i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

B - fausse ;

C - vraie ; car : $V_n = I_m(V) = \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$

D - fausse.

E - fausse ; car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{Vn}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{2n})}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2}\frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}}} = \frac{2}{\pi}$

Question 2

- On a : $S = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

A - fausse ; car : $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ car $(\forall k \geq 1)$,

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

B - fausse.

C - Vraie ; car : $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

D - fausse.

E - fausse.

Question 3

A - fausse ; car : $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1-e^2}{e^2}\right)(1+U_n) < 0$

D'où : $(U_n)_n$ est de croissante.

B - fausse ; car : $V_{n+1} - V_n = 3(1+U_n)(e^{-2}-1)$

C - fausse ; car : $(V_n)_n$ est géométrique de raison e^{-2}

D'où : $V_n = 3e^2(1-n)$ et par la suite : $U_n = e^{2-2n} - 1$.

D - fausse ; car : puisque $(-1 < \frac{1}{e^2} < 1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V = 0$

E - Vraie ; car la suite $(W_n)_n$ est arithmétique avec $W_n = \ln(V_n)$ de raison -2 et de premier terme $W_0 = \ln V_0$

D'où : $\ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)(W_0 + W_n) = \left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln V_0 + \ln V_n)$

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln 3 + 2 + \ln 3 + 2 - 2n)$

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)(2\ln 3 + 4 - 2n)$

$= (n+1)(\ln 3 + 2 - n)$

Question 4

On a : $f(x) = x - \frac{1-2\ln(1+x)}{x+1}$

A - fausse ; car : $Df =]-1, +\infty[$

B - fausse ; car : $\lim\limits_{(-1)^+} f(x) = +\infty$

C - fausse ; car : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

D - fausse.

E - Vraie.

Question 5

A - fausse ; car : $f(x) = x \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

B - Vraie ; car : $\forall x \in]-1, \sqrt{e} - 1]$; $f(x) - x \geq 0$

$(1 - 2\ln(x+1) \geq 0)$

C - Vraie ; car : $\forall x \in [\sqrt{e} - 1, +\infty[$; $1 - 2\ln(x+1) \leq 0$

D - Vraie ; car : $y = f'(\sqrt{e^3} - 1)(x - \sqrt{e^3} + 1) + f(\sqrt{e^3} - 1)$

$= 1(x - \sqrt{e^3} + 1) + \sqrt{e^3} - 1 + \frac{2}{\sqrt{e^3}} = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$

E - fausse.

Scanné avec CamScanner

Question 6

A - fausse ; car : $S = \frac{1}{2}\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{144+36}$$

$$= \frac{\sqrt{180}}{2} = 3\sqrt{5}.$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 12\vec{j} - 6\vec{k}$$

B - fausse.

C - fausse ; car la longueur du hauteur AH est :

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{6\sqrt{5}}{6} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = 2.\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

D - vraie

E - fausse ; car : on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

Question 7

A - fausse ; car le périmètre du cercle est $2\pi R$.

B - fausse ; car :

$$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$$

C - fausse ; car : $C_9^5 = \frac{9.8.7.6.5}{5.4.3.2} = 126$ est le nombre des comités

D - fausse ; car le hectare est l'unité des surfaces.

E - Vraie.

Question 8

A - fausse ; car :

$$I = 2.\int_0^{-a} (\tan^3(x) + \tan x)\,dx$$

$$= 2.\int_0^{-a} \tan x\,(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= 2.\int_0^{-a} \tan'(x)\tan(x)\,dx = 2\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{-a}.$$

$$= \tan^2 a = \frac{1-\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} - 1$$

B - fausse.

C - fausse ; car :

On a : $J = \int_0^{-a} \cos(2t)\cos^2(2t)\,dt$

$$= \int_0^{-a} \cos(2t)\,(1-\sin^2(2t))\,dt.$$

$$= \int_0^{-a} [\cos(2t) - 1/2\sin'(2t)\sin2(2t)]\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{6}\sin^3(2t)\right]_0^{-a}.$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(2a) + \frac{1}{6}\sin^3(2a)$$

D - Fausse

$$J = \frac{\sin(2a)}{2}\left[\frac{\sin^2(2a)}{3} - 1\right] = \frac{2\cos a\sin a}{2}\left[\frac{\sin^2(2a)}{3} - 1\right]$$

$$= \sin a\left[\frac{\cos a\sin^2(2a)}{3} - \cos a\right].$$

E - Vraie

Question 9

A - fausse ; car, on a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

B - fausse ; car :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$$

$$= [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

- On trouve : $I_{n+2} = (\frac{\pi}{2})^{n+2} - (n+2)(n+1)\,I_n$

D - Vraie.

E - fausse ; car, on a : $I_2 = (\frac{\pi}{2})^2 - 2I_0 = \frac{\pi^2}{4} - 2$

Question 10

A - vraie ; car :

$\cos(\frac{9\pi}{12}) = -\cos(\frac{3\pi}{12})$ et $\cos(\frac{11\pi}{12}) = -\cos(\frac{\pi}{12})$

- Donc : $\cos^2(\frac{3\pi}{12}) + \cos^2(\frac{5\pi}{12}) + \cos^2(\frac{9\pi}{12}) + \cos^2(\frac{11\pi}{12})$

$$= 2\cos^2\frac{3\pi}{12} + 2 = 3$$

B - fausse ;

- car, on a : $f(4-x) + f(x) = 24x^2 - 96x + 192$

C - fausse ; car : $\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{1-2\sin x\cos x}$

$$= \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|.$$

D - fausse ;

car, on a : $f(x+\pi) = 1 + 8\cos x - 4\cos(2x) \neq f(x)$.

E - fausse ;

car la propriété $(g\circ f)' = f'.g'(f)$ est vraie.

Scanné avec CamScanner

• Le nombre de questions est 6 :

I / Les courbe (Cf) et (Cg) ; voir au-dessous ; sont les courbes des deux fonctions f et g dans un repère orthonormé (Δ) la tangente à (Cf) au point A(4,3).

1) Déduire de la courbe (Cf) la valeur $f'(2)$.

2) Trouver l'équation $y = ax + b$ de la tangente (Δ) et donner les valeurs de a et b :

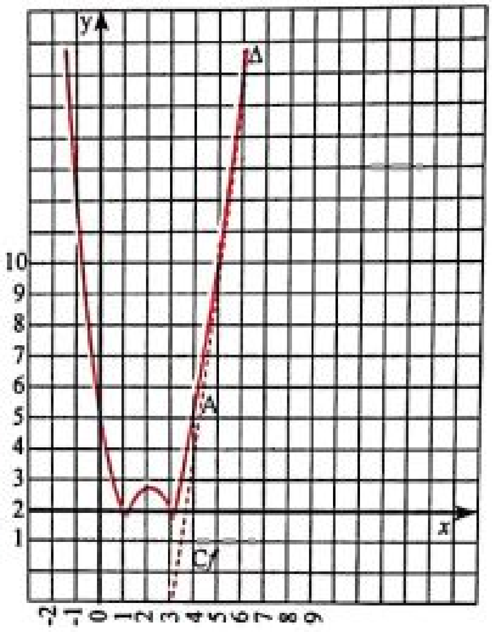
a = ... et b = ...

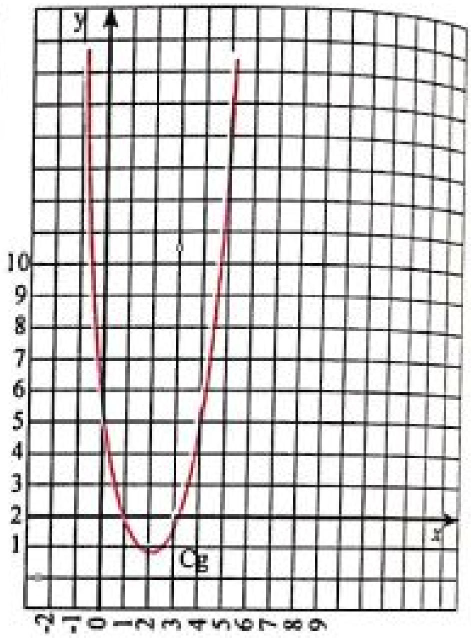
3) On donne $g(x) = x^2 - 4x + 3$; marquer par une croix la bonne réponse

A . $f(x) = -g(x)$ ☐

B . $f(x) = g(x) + 1$ ☐

C . $f(x) = |g(x)|$ ☐





II / Donner le domaine de définition de la fonction h telle que : $h(x) = \ln(-x)\sqrt{1 - \ln(4x^2)}$

III / Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-\frac{9}{2}}^{-1} \frac{4x + 1}{\sqrt{2x^2 + x}}\,dx$

IV / Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x}}$

V / Dans un repère orthonormé ; on considère le plan (P) d'équation : $x + 2y - z = 3$ et le plan (P') d'équation $3x + 2y - z = 5$. On pose $z = t$, parmi les propositions suivantes (A, B, C) ; quelle est la représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P) et (P').

A : $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 3t \end{cases}$ B : $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$ C : $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

VI / Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules noires et une boule blanche. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire 3 boules de l'urne simultanément calculer les probabilités suivantes P_A et P_B des événements : A « Deux boules au moins sont rouges ».
B « Deux boules au moins ayant la même couleurs ».

Pour répondre à cette question ; on donne les propositions suivantes :

1	$\frac{5}{28}$	$\frac{16}{84}$	$\frac{50}{84}$	$\frac{23}{28}$	$\frac{26}{42}$	1

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Médecine et Pharmacie

2016 - 2017 (Casablanca)

I / 1 - La tangente (Δ) passe par les deux points $A(4,3)$ et $B(3,-1)$ son coefficient directeur est $f'(2)$

donc : $f'(2) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-3}{3-4} = 4$

2 - On a l'équation de (Δ) est : $y = ax + b$ avec $a = f'(2)$

Donc : $y_A = 4x_A + b \iff y_A - 4x_A = 3 - 16 = -13$

D'où : $b = -13$ et $a = 4$

3 $f(x) = -g(x)$ fausse

$f(x) = g(x) + 1$ fausse

$f(x) = |g(x)|$ vraie

II / Domaine de définition de la fonction h telle que: $h(x) = \ln(-x)\sqrt{1 - \ln(4x^2)}$

est : $D_h = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } 1 - \ln(4x^2) \geq 0\}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ et } \ln(4x^2) \leq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ et } 4x^2 \leq e\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ et } |x| \leq \dfrac{\sqrt{e}}{2}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ et } -\dfrac{\sqrt{e}}{2} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{e}}{2}\}$

D'où : $D_h = \left[-\dfrac{\sqrt{e}}{2} ; 0\right[$.

III / Calculons l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{9}{2}}^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x}}\,dx$

$$I = 2\int_{-\frac{9}{2}}^{-1} \frac{(2x^2+x)'}{2\sqrt{2x^2+x}}\,dx = 2\left[\sqrt{2x^2+x}\right]_{-\frac{9}{2}}^{-1}$$

$$I = 2\left[1 - \sqrt{\frac{81}{2} - \frac{9}{2}}\right] = 2\left(1 - \sqrt{\frac{72}{2}}\right)$$

$I = 2(1-6) = -10.$

IV / Calculons la limite : $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{x}}$

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{2x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$$

V / La représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 + t \\ 3x + 2y = 5 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = 3 + t \\ 2x = 5 \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

Donc la réponse juste est B

VI / Soit Ω l'univers de possibilités

L'urne :

R R R	N	B
R R	N	
	N	

$\text{Card}\,\Omega = C_9^3 = \dfrac{9.8.7}{6} = 84$

$$P_A = \frac{C_5^2\ C_4^1 + C_5^3}{84} = \frac{10.4 + 10}{84} = \frac{50}{84} = \frac{25}{42}$$

$$P_B = \frac{50 + C_3^2\ C_6^1 + C_3^3}{84} = \frac{50 + 18 + 1}{84} = \frac{69}{84} = \frac{23}{28}$$

Scanné avec CamScanner

• **Exercice 01** :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{1+U_n}}$;

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \dfrac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

Question 1 $(V_n)_n$ est géométrique de raison :

Ⓐ	$\frac{1}{4}$	Ⓑ	2	Ⓒ	$\frac{1}{2}$	Ⓓ	4

Question 2 L'expression de U_n est (en fonction de n) :

Ⓐ	$\frac{2^n}{\sqrt{3+2^{2n}}}$	Ⓑ	$\frac{2^n\sqrt{3}}{\sqrt{2+2^{2n}}}$	Ⓒ	$\sqrt{\frac{3\times 4^n}{2+4^n}}$	Ⓓ	$\sqrt{\frac{4^n}{3+4^n}}$

Question 3 La valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

Ⓐ	$\frac{\sqrt{x}}{3}$	Ⓑ	$\sqrt{3}$	Ⓒ	2	Ⓓ	$+\infty$

• **Exercice 02** : On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 2x\ln x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Question 4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est :

Ⓐ	$+\infty$	Ⓑ	$-\infty$	Ⓒ	0	Ⓓ	1

Question 5 On admis que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle :

Ⓐ	$]0, \frac{1}{2}[$	Ⓑ	$]\frac{1}{2}, 1[$	Ⓒ	$]1, e[$	Ⓓ	$]0, +\infty[$

Question 6 La fonction dérivée de la fonction $x \to x^2 \ln x$ est :

Ⓐ	$x \to 2x\ln x + x$	Ⓑ	$x \to x\ln x + x$	Ⓒ	$x \to x(1+\ln x^2)$	Ⓓ	$x \to \frac{x}{2}\ln x$

Question 7 La valeur de l'intégrale : $\int_{1}^{e} f(x)\,dx$ est :

(A)	$e^2 + \frac{1}{2}$	(B)	$e^2 + \frac{1}{2}$	(C)	$\frac{1+e^2}{4}$	(D)	$\frac{1+e^2}{2}$

• Exercice 03 : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{1}^{e} x^n \ln x\,dx$

Question 8 In en fonction de n est :

(A)	$\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$	(B)	$\frac{ne^{n+1}}{(n+1)^2}$	(C)	$n\frac{e^{n+1}+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$	(D)	$\frac{e^n}{n}\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Question 9 La valeur de la limite ; $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ est :

(A)	0	(B)	1	(C)	2	(D)	$+\infty$

• Exercice 04 : Une urne U contient 4 boules dont trois numérotées, 2 et une numérotée 1, toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Question 10 (1ère expérience) ; on tire aléatoirement et simultanément 3 boules de l'urne U. La probabilité de l'événement : « Avoir la boule numérotée 1 parmi le boules tirées » est :

(A)	$\frac{1}{2}$	(B)	$\frac{3}{4}$	(C)	$\frac{1}{3}$	(D)	$\frac{1}{4}$

Question 11 (2ème expérience) ; on tire aléatoirement et successivement avec répétition 3 boules de l'urne U. La probabilité de l'événement : « Avoir exactement une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2 » est :

(A)	$\frac{15}{64}$	(B)	$\frac{1}{16}$	(C)	$\frac{11}{16}$	(D)	$\frac{27}{64}$

Question 12 (3ème expérience) ; on tire aléatoirement une boules de l'urne U, puis on la remet à U, puis on tire simultanément deux boules de l'urne U. La probabilité de l'événement : « Parmi les boules tirées il y a une numérotée 1 et deux numérotées 2 » est :

(A)	$\frac{1}{2}$	(B)	$\frac{3}{4}$	(C)	$\frac{1}{3}$	(D)	$\frac{2}{3}$

Corrigée concours d'accès à la 1ère année de Médecine dentaire

2016 (Rabat)

Exercice 01 :

On a :($\forall n \in \mathbb{N}$) ; $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$ et $U_0 = 1$

Question 1

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2} = \frac{\dfrac{4U_n^2}{1+U_n^2}}{3 - \dfrac{4U_n^2}{1+U_n^2}}$$

$$= \frac{4U_n^2}{1+U_n^2} \cdot \frac{1+U_n^2}{3+3U_n^2-4U_n^2} = \frac{4U_n^2}{3+U_n^2} = 4V_n$$

Donc $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison q

= 4

D'où la réponse juste est : (D)

Question 2

On a : $V_n = \dfrac{U_n^2}{3 - U_n^2}$ et ($\forall n \in \mathbb{N}$) $V_n = \dfrac{1}{2} 4^n$

<=> $V_n(3-U_n^2) = U_n^2$ <=> $3V_n = V_n U_n^2 + U_n^2$

<=> $U_n^2 = \dfrac{3V_n}{V_n + 1}$ et $U_n > 0$

<=> $U_n = \sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} = \sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}4^n}{\frac{1}{2}4^n + 1}} = \sqrt{\dfrac{3 . 4^n}{4^n+2}}$

$$= \frac{2^n\sqrt{3}}{\sqrt{2+2^n}}$$

D'où la réponse juste est : (B).

Question 3

• On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3 . 4^n}{4^n+2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{4^n}}}$

D'où la réponse juste est (B).

Exercice 02 :

• On a : $f(x) = x + 2x\ln x + \dfrac{\ln x}{x}$

Question 4

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x + 2x\ln x + \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

• D'où la réponse juste est (B) .

Question 5 On a f est continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{2},1]$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 3\ln 2 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$; admet une solution unique sur l'intervalle $]\frac{1}{2},1[$

D'où la réponse est (B).

Question 6

On a : $(x^2\ln x)' = (x^2)'\ln x + x^2(\ln x)' = 2x\ln x + x^2.\dfrac{1}{x}$

$$= 2x\ln x + x$$

D'où la réponse juste est (A).

Question 7

• On a : $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(x + 2x\ln x + \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$$= \int_1^e [(x^2\ln x)' + (\ln x)' + (\ln x)'(\ln x)]\,dx$$

$$= \left[x^2\ln x + \frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e = e^2 + \frac{1}{2}$$

D'où la réponse juste est : (A)

Exercice 03 :

On a : $I_n = \int_1^e x^n \ln x \, dx$; $(n \in \mathbb{N})$

Question 8

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = x^n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{array}\right.$$

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e x^n dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)\right]_1^e$$

$$= \frac{e^{n+1}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= e^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

D'où la réponse juste est : (C) .

Question 9

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{ne^{n+1}}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+1)^2} = +\infty.$

D'où la réponse juste est : (D)

Exercice 04 :

L'urne : 2 2 ⋮ 1
2

Question 10 Soit Ω univers de possibilités ; on a: $\text{Card}\,\Omega = C_4^3 = 4$ et soit A l'événement « Avoir la boule numérotée 1 ».

On a : $\text{Card}A = C_1^1\ C_3^2 = 3.$

D'où : $P(A) = \dfrac{3}{4}$

Donc la réponse juste est : (B).

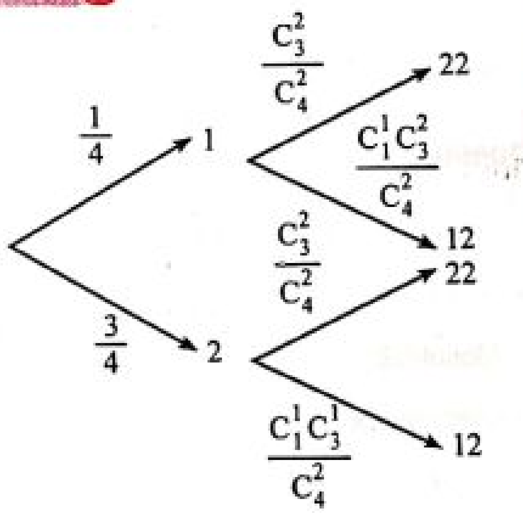
Question 11 Soit Ω Univers de possibilités ; on a : $\text{Card}\,\Omega = 4^3$, soit B l'événement « Avoir une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2 »

On a : $\text{Card}\,B = \dfrac{3!}{2!\,1!}\ 3^2.1^1 = 3^3$

Donc : $P(B) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$

D'où la réponse juste est : (D).

Question 12 On considère l'arbre suivant :



Soit C l'événement « Avoir une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2 »

On a : $P(C) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{C_3^2}{C_4^2} + \dfrac{3}{4}\,.\,\dfrac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}$

$$= \frac{1}{4}\,.\,\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

D'où la réponse juste est : (A).

Scanné avec CamScanner

Question 21

Soient m une constante de $\mathbb{R}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = x^m - (\ln x)^2$

A - Si $m > 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

B - Si $m < 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$

C - Si $m < 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

D - Si $m \leq 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

E - Si $m > 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Question 22

Soit Un la suite définie par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$. La suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est :

A - Monotone.

B - Convergente.

C - Négative.

D - Décroissante et minorée.

E - Croissante et majorée.

Question 23

A - La partie réelle de $(1 - i)^5$ est $\sqrt{2}$.

B - La partie imaginaire de $(1 + i)^{20}$ est 42.

C - $(1 + i)^{20}$ est réel.

D - L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède une et une seule solution dans C.

E . L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède trois solutions distinctes dans C .

Question 24 Soit f la fonction définie sur R par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ \cos x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

A - L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions dans l'intervalle $]-\infty, 2\pi]$.

B - f n'est pas continue en 0.

C - f est dérivable en 0.

D - L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions dans l'intervalle $]-\infty, \pi]$.

E - L'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $]-\infty, \pi]$.

Question 25

A - $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx = -2.$

B - $\displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\frac{1}{2}\ln 2.$

C - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \ln 2.$

D - $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4 + 2\sqrt{e}.$

E - $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4 - 2\sqrt{e}.$

Scanné avec CamScanner

Question 26 Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

A - L'image de $\mathbb{R}$ par f est]0 , 1].

B - L'image de $\mathbb{R}$ par f est]0 , +∞].

C - La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x) - f(x+1)$.

D - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.

E - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) < 1/2$.

Question 27 Soient n et p deux entiers naturels strictement positifs.

A - Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n est impair et p est pair.

B - Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n est pair et p est impair.

C - Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors np est impair.

D - Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n et p sont pairs.

E - Si $n^2 + np + p^2$ est pair, alors n et p sont impairs.

Question 28

A - $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 1 - \sqrt{2}$

B - $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 2(1 - \sqrt{2})$.

C - $\int_0^{-\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 4(\sqrt{2} - 1)$

D - $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 4$.

E - $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 4(1 - \sqrt{2})$

Question 29

Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $U_n = \frac{e^n}{n^n}$ et $V_n = \ln(U_n)$.

A - La suite (V_n) et la suite (U_n) ont la même limite.

B - La suite (V_n) est strictement croissante.

C - La suite (U_n) est strictement croissante.

D - La suite (U_n) est bornée.

E - La suite (U_n) admet une limite et cette limite est non nulle.

Question 30

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et pour tout :

$n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + n - 2$

On définit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$.

A - Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $U_n \leq n - 3$.

B - Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $U_n \geq n - 3$.

C - La limite de la suite (U_n) est finie.

D - La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{21}{2}$.

E - Pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}$

Corrigé Concours d'accès à la 1ère année de Médecine
Université Cadi Ayyad — 2015 (Marrakech)

Question 21

$h(x) = x^m - (\ln x)^2$

A - Faux ; car : Si m > 0 ; alors $\lim_{x \to +\infty} x^m - (\ln x)^2 = +\infty$

B - Faux ; car : Si m < 0 ; alors $\lim_{x \to 0^+} x^m - (\ln x)^2 = +\infty$

C - Faux ; car : Si m < 0 ; alors $\lim_{x \to 0^+} x^m - (\ln x)^2 = +\infty$

D - Faux ; car : si $m \leq 0$; alors $\lim_{x \to +\infty} x^m - (\ln x)^2 = -\infty$

E - Vraie.

Question 22

$U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$

A - Faux ; car : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(-1)^n(-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$ change de signe.

B - Vraie ; car : $\lim_{x \to 0} U_n = 0$; ($|Un| < \dfrac{1}{n^2}$ et $\lim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$).

C - Faux ; car : Un change de signe.

D - Faux ; car : $U_{n+1} - U_n$ change de signe.

E - Faux.

Question 23

A - Faux ; car : $(1 - i)^5 = \sqrt{2}^5 \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= -4 + 4i.$$

B . Faux ; car : $(1 + i)^{20} = -2^{10}$.

C . Vraie ; car : $(1 + i)^{20} = -2^{10}$.

D . Faux ; car : $z^4 - 1 = 0 \Longleftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = i$ ou $z = -i$.

E . Faux ; car : $z^4 - 1 = 0$ admet quatre solutions distinctes dans D.

Question 24

A . Faux : car $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$ dans $]-\infty, 2\pi]$.

B . Faux : car $\lim_{0^+} f(x) = 1 = \lim_{0^-} f(x)$.

C . Faux : car $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = 1$.

D . Faux : car $\underset{x \in]-\infty, \pi]}{f(x) = 0} \Longleftrightarrow \underset{x \in]-\infty, \pi]}{\cos x = 0} \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$.

E . Vraie.

Question 25

A . Faux ; car : $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^e = -\ln(\ln 2)$.

B . Faux ; car : $\displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$.

C . Faux.

D . Faux ; car : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}\ln x]_1^e - [4\sqrt{x}]$

$$= 4 - 2\sqrt{e}.$$

E . Vraie.

Question 26

A . Vraie ; car :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

B . Faux.

C . Faux ; car : $g'(x) = f'(x+1) - f(x)$.

Scanné avec CamScanner

D - Faux ; car : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) > 0\ ;$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g(x) > 0.$

E - Faux ; car : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; 0 < f(t) \leq 1$

donc : $0 < g(x) \leq 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Question 27

A - Faux ; car la négation est fausse.

B - Faux ; car la négation est fausse.

C - Faux ; car la négation est fausse.

D - Vraie ; car la négation est vraie.

E - Vraie ; car la négation est vraie.

Question 28

A - Faux ; car : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = 2(\sqrt{2} - 1).$

B - Faux ; car : $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 4(\sqrt{2} - 1).$

C - Faux ; car : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2(x)} = 4.$

D - Vraie.

E- Faux ; car (voir B).

Question 29

A - Faux ; car : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0^+$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

B - Faux ; car : $V_{n+1} - V_n = \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) < 0.$

C - Faux ; car : $\frac{Un+1}{U_n} - 1 = \frac{n^n\left(e - \left(\frac{n}{n}\right)^n . (n+1)\right)}{(n+1)^{n+1}} < 0.$

D - Vraie ; car : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 0 < U_n < 1.$

E - Faux ; car : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0+.$

Question 30

$U_0 = 1\ ; U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + n - 2\ ; (n \in \mathbb{N}).$

$U_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}.$

A - Faux ; car pour n = 5 ; on a : $U_5 = \frac{1016}{243} > 2.$

B - Vraie.

C - Faux ; car supposons que la limite (U_n) est finie et égale à ℓ.

- Alors on aura : $\ell = \frac{1}{2}\ell + \infty - 2$ absurde.

D - Faux ; car certainement $(V_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ mais son premier terme est : $V_0 = \frac{25}{2}$.

E - Faux ; car :

On a : $V_n = \frac{-25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$

- Donc : $2U_n = -V_n + 3n - \frac{21}{2}$

$\Leftrightarrow U_n = -\frac{1}{2}V_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{21}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine et Pharmacie épreuve de Maths 2015-2016 (Oujda)

Question 1

- On considère le complexe : $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$

A - $z = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ B - $z = \sqrt{3}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$.	C - $z = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ D - $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.	E - $z = \sqrt{6}\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})\right)$.

Question 2

- On considère la suite numérique $(U_n)_n$ définie par :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^n$ et $U_0 = 1$.

A - $U_4 = \dfrac{1}{32}(1 + i\sqrt{3})$ B - $\lvert Un \rvert = 2^n$	C - $\lim\limits_{n \to +\infty} \lvert Un \rvert = 2$ D - La valeur de n pour que U soit réel est : $n = 3k + 1$; $(k \in \mathbb{N})$	E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 3

- On considère les deux suites : $Vn = -5.(\sqrt{2})^n$ et $Un = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{2}{3^p}$

A - $Un = 2.(1 + 3^n)$ B - $\lim\limits_{n \to +\infty} Vn = 0$	C - $\lim\limits_{n \to +\infty} Un = 3$ D - $\lim\limits_{n \to +\infty} Vn = -5$	E - $\lim\limits_{n \to +\infty} Un = +\infty$

Question 4

- D'après une étude effectuée autour de la présence des spectateurs dans les stades de football ; on constate que 80% des adhérents renouvellent leur adhérence et 4000 nouveaux spectateurs s'adhèrent par année. On note Vn le nombre d'adhérents à la fin de l'année n et on a : $V_0 = 7000$.

On pose $U_n = 2.10^4 - V_n$.

A - $V_{n+1} = 11000 + 0,8\ Vn$ B - $V_{n+1} = 7000 + 0,8\ Vn$	C - $(Un)_n$ est arithmétique D - $Un = 13000\ .\ (0,8)^n$	E - $Un = 13000\ .\ (0,2)^{n+1}$

Question 5 • On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + \frac{x^2}{2}$

A - Domaine de définition de g est : $D_g =]-\infty,2] \cup [2,+\infty[$

B - Dans un intervalle déterminé, on a : $g^{-1}(x) = \frac{x}{2\sqrt{3+1}}$

C - $(g^{-1})'(0) = 1$

D - $g'(0) = 0$

E - $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 2$

Question 6

A - Si le diagonal d'un cube est $4\sqrt{2}$ cm, alors son volume est: $8cm^3$.

B - Il faut multiplier le rayon d'une sphère par $\sqrt[3]{3}$ pour que son volume se triple.

C - Si $x^2+y^2 = 208$ et $xy = 58$, alors $x + y = 16$.

D - Le produit de trois entiers naturels successifs est 990, alors la somme de deux petits valeurs est 21

E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 7 • Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sin(2x)$ et soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

A - f est paire

B - O n'est pas un centre de symétrie pour (Cf).

C - (Cf) est située au-dessus de la droite : $y = 2x + 1$.

D - La période de f est π.

E - $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$.

Question 8 • On considère la fonction f telle que :

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{\ln(1-x)}{1-x}} \quad \text{et} \quad In = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad Jn = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx.$$

A - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

B - pour $x = -\sqrt{e}$, on a : $f'(x) = 0$

C - $J_n - nI_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

D - $I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$

E - $J_n = \frac{1 + ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$

Question 9 • Soient les deux intégrales : $J = \int_0^a \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$ et $I = \int_0^a \frac{\cos 2x}{1+2\sin x} dx$

A - $I = 1 - \ln(1 - \sin a)$

B - $I = 1 - \ln(1 - 2\sin a)$

C - $J = \sin a + \ln(1 + 2\sin a)$

D - $J = \sin a + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\sin a}}\right)$

E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Question 10 • On considère la suite $(In)_n$: $(n \geq 1)$; $In = \int_0^a x^n . e^{-x} . dx$

A - $I_1 = 1 + \frac{a+1}{e^a}$

B - La suite (In) est croissante pour $a = 1$

C - $\lim_{n \to -\infty} In = +\infty$ (avec $a = 1$)

D - $In = n.I_{n-1} + a^n . e^{-a}$

E - Toutes les réponses proposées sont fausses.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1

A - fausse ; car : $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

B - fausse ; car : $z=\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

C - fausse ; car : $z=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

D - vraie ; car : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{6}}{4}$

E - fausse ; car : $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 2

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)U_n$ et $U_0=1$

A - fausse ; car : $U_4=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^4$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^4 2^4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{32}(-1-i\sqrt{3})$

B - fausse ; car : $|U_n|=\left|\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^n\right|=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right|$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

C - fausse ; car : $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

D - fausse ; car : $U_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{\pi}{3}n}\in\mathbb{R} \iff \frac{\pi}{3}n=k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$

$\iff n=3k$; $(k\in\mathbb{Z})$

E - vraie ;

Exercice 3

$V_n=-5.(\sqrt{2})^n$ et $U_n=\sum\limits_{p=0}^{n-1}\dfrac{2}{3^p}$

A - fausse ; car : $U_n=2\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^p=2\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

$=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

B - fausse ; car : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=-\infty$; $(\sqrt{2}>1)$

C - vraie ; car : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$=3$; $(-1<\frac{1}{3}<1)$

D - fausse ; car : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=-\infty$

E - fausse ; car : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3$

Exercice 4

A - fausse ; car :

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $V_{n+1}=4000+80\%\,V_n$

$V_{n+1}=4000+0,8\,V_n$

B - fausse ; (voir (A))

C - fausse ; car : $U_{n+1}=2.10^4-V_{n+1}$

$=2.10^4-400-0,8\,V_n$

$=16000-0,8\,V_n$

$=0,8\,(2.10^4-V_n)=0,8\,U_n$

D'où (U_n) est géométrique de raison 0,8.

D - vraie ; car : $U_n=U_0\,(0,8)^n$

$=(20000-7000)\,(0,8)^n$

$=13000\,(0,8)^n$

E - fausse ; (voir (D)).

Scanné avec CamScanner

Exercice 5

A - fausse ; car $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2+4>0$ et donc : $Dg = \mathbb{R}$

B - fausse ; car : si $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$

alors $g(g^{-1}(x)) \neq x$

C - vraie ; car : $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{(g^{-1})'(0)} = \dfrac{1}{g'(0)} = 1$

$\begin{cases} g(0)=0 ; \\ g'(0)=1 \end{cases}$

D - fausse ; car on a : $g'(0) = 1$

E - fausse ; car : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{4}{(-x)\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}+1\right)} = -1$

Exercice 6

A - fausse ; car on a : $V = (4\sqrt{2}\text{cm})^3 = 64(\sqrt{2})^3\text{cm}^3$

B - vraie ; car on a : $V = \dfrac{4\pi}{3} R^3$ (volume d'une sphère de rayon R)

Donc : $3V = \dfrac{12\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3$ et $\dfrac{4\pi}{3}(R.\sqrt[3]{3})^3 = 4\pi R^3$

C - fausse ; car : $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 208+116$

$= 324 \iff |x+y| = 18$

D - fausse ; car : $n(n+1)(n+2) = 990$ et $n+n+1 = 21$

$\iff n(n+1)(n+2) = 99$ et $n = 10$

$\iff n = 10$ et $10.11.12 = 990$

$\iff n = 10$ et $1320 = 990$

E - fausse.

Exercice 7

A - fausse ; car : $f(-\pi) \neq f(\pi)$

et $f(-\pi) = -2\pi$ et $f(\pi) = 2\pi$

B - fausse ; car : f est impaire ; donc O est centre de symétrie pour (Cf)

C - fausse ; car : $f(x) - (2x+1) = \sin(2x) - 1 \leq 0$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

D - fausse ; car : f n'est pas périodique.

E - vraie ; car : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{x} + \dfrac{\sin 2x}{x} = 2+2 = 4$

Exercice 8

A - fausse ; car on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

B - fausse ; car : $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \dfrac{(-1+2\ln(1-x))}{2\sqrt{\ln(1-x)}}$

et $f'(x) = 0 \iff x = 1 - \sqrt{e}$

C - fausse ; car :

On a : $(Jn - nI_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-nx}\cos x - ne^{-nx}\sin x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-nx}\sin x)'\,dx$

$= [e^{-nx}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{n\pi}{2}}$

D - vraie.

E - fausse ; car on a : $J_n = \dfrac{n+e^{-\frac{n\pi}{2}}}{1+n^2}$

Exercice 9

On a : $J = \int_0^a \dfrac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$ et $I = \dfrac{1}{2}\ln(1+2\sin a)$

Donc :

A - fausse.

B - fausse.

C - fausse.

D - fausse.

E - vraie.

Exercice 10

A - fausse ; car : $I_1 = \int_0^a x.e^{-x}\,.dx$

$= [-xe^{-x}]_0^a - [e^{-x}]_0^a$

$= 1 - \dfrac{a+1}{e^a}$

B - fausse ; car : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n . e^{-x}(x-1)\,.dx \leq 0$ (pour $a = 1$)

C - fausse ; car I_n ne dépend pas de x.

D - fausse ; car on a : $I_n = nI_n - a^n e^{-a}$

(En utilisant une intégration par parties)

E - vraie.

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès en 1ère année de Médecine et Pharmacie Université HASSAN II 2015-2016 (Casablanca)

- **Le nombre de question est 06**

I - On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^x(\cos x - \sin x)$

Et soit (Cf) sa courbe dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Etude de la fonction f sur : $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}\right]$

Répondre aux questions suivantes :

2.1) Donner les coordonnées du point $A(x, f(x))$ par lequel passe une tangente horizontale à (Cf) ; A (.....,.....).

2.2) Répondre par oui ou non aux propositions suivantes :

(a) f est décroissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$; (b) f est décroissante sur $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

II - Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{3 - x^2}$

III - Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^4 + 3x^2 + \frac{9}{8}}\,dx$

IV - Soient A, B et C trois points de plan complexe d'affixes respectives :

$z_A = 2 - 4i$ et $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = 8 - 6i$

On pose : $W = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

1) Calculer le module et un argument de W.

2) Déterminer la nature du triangle ABC.

V - On met dans une solution nourrissante 1000 bactéries quelconques. On observe que ces bactéries se développent de 50% par journée. On note par U_n le nombre de bactéries trouvées dans le liquide pour le jour " n ".

1) Quelle est la nature de la suite $(U_n)_n$.

2) Donner sa raison.

VI - Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Un nombre de ces boules sont noires le reste sont blanches. Ces boules sont soit décorées soit non. On a 3 boules noires, 7 décorées et une boule noire et décorée. Pour répondre aux questions (1) et (2) on peut utiliser les propositions suivantes :

1) On tire aléatoirement une seule boule de l'urne. Calculer la probabilité p pour avoir une boule noire décorée.

1	0,900	0,343	0,216	0,166	0

2) On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité p' pour avoir 3 boules blanches et décorées.

Scanné avec CamScanner

Corrigé concours d'accès en 1ère année de Médecine et Pharmacie Université HASSAN II

2015 - 2016 (Casablanca)

I - Calculons la limite suivante : $\ell = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

1) On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq -\sin x \leq 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-2 \leq \cos x - \sin x \leq 2$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|\cos x - \sin x| \leq 2$

Par la suite $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f(x)| \leq 2e^x$ (car $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x > 0$)

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (car : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0$)

2) Etude de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

2.1) On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = -2e^x \sin x$

Et puisque: $\begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi \,; \\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$; et $A(\pi\,; -e^\pi)$ et $f'(\pi) = 0$

2.2) On a : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; $f'(x) = -2e^x \sin x$

Et puisque : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; $-2e^x < 0$ et $\sin x \geq 0$

Alors : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $f'(x) \leq 0$

Et puisque : $\forall x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; $-2e^x < 0$ et $\sin x \leq 0$

Alors : $\forall x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; $f'(x) \geq 0$

Donc :

a - Proposition vraie : sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ f est décroissante.

b - Proposition fausse : sur $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ f est croissante.

II - Calculons : $\ell_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{3 - x^2}$

$$\ell_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

III - Calculons l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^4 + 3x^2 + \frac{9}{8}} dx$

On a : $2x^4 + 3x^2 + \frac{9}{8} = 2\left(x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}\right) = 2\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2$

D'où : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2} . dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)'}{2\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2} dx$

$= \dfrac{1}{4}\left[-\dfrac{1}{x^2 + \frac{3}{4}}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} - \dfrac{1}{\frac{3}{4}}\right)$

$= -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{12 - 28}{21}\right) = \dfrac{16}{4 \times 21} = \dfrac{4}{21}$

Donc : $I = \dfrac{4}{21}$.

IV - 1) Le module et un argument de W :

On a : $W = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{4 + 2i - 2 + 4i}{8 - 6i - 2 + 4i} = \dfrac{2 + 6i}{6 - 2i}$

$= \dfrac{2i\,(3 - i)}{2\,(3 - i)} = i$

Donc : $|W| = 1$ et $\arg(W) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2 - Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

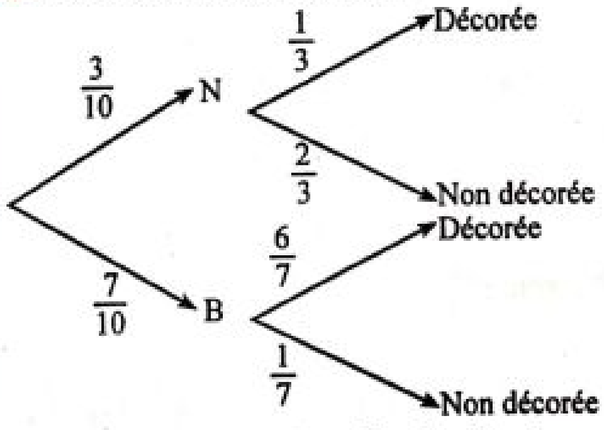
V - On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = U_n + 50\%\, U_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \frac{3}{2} U_n$

D'où : (1) La suite $(Un)_n$ est géométrique.

(2) La raison de la suite (Un) est $\frac{3}{2}$.

VI - On considère l'arbre suivant :



Donc : (1) $P = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{7} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}9$

(2) $P' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0{,}216$.

Exercice 1

Le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est :	A - $[1,+\infty[$ B - $\mathbb{R}$ C - $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ D - $]-\infty,-1[$ E - $]1,+\infty[$

Exercice 2

La dérivée de la fonction : $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x \to \ln(\sqrt[3]{e^x})$ est la fonction g' définie sur $\mathbb{R}$ par :	A - $g'(x) = \frac{x-1}{3\sqrt[3]{e^{2x}}}$ B - $g'(x) = \frac{x-1}{3\sqrt[3]{e^{x}}}$ C - $g'(x) = \frac{e^x}{3}$ D - $g'(x) = \frac{1}{3}$ E - $g'(x) = \frac{1}{3e^x}$

Exercice 3

La valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{\pi} 2e^x \sin(x)\,dx$ est :	A - $I = e^{\pi}$ B - $I = e^{\pi} - 1$ C - $I = e^{\pi} + 1$ D - $I = 0$ E - $I = 1 - e^{\pi}$

Exercice 4

Soit m un réel non nul. La solution générale de l'équation différentielle : $y''-2my'+2m^2y = 0$ est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :	A - $y(x) = e^{mx}(a\cos(mx) + b\sin(mx))$ B - $y(x) = ae^{mx} + be^{-mx}$ C - $y(x) = ae^{mx} + b$ D - $y(x) = (ax+b)e^{mx}$ E - $y(x) = a\cos(mx) + b\sin(mx)$

Scanné avec CamScanner

Exercice 5

L'intersection de la sphère :
$S(\Omega(1, 1, 1), R = 1)$ et le plan d'équation :
$(P) : x - y + z + \sqrt{3} - 1 = 0$ est :

- A - Segment
- B - Demi-cercle
- C - Un point
- D - ensemble vide.
- E - Cercle.

Exercice 6

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 qui contiennent 20 boules distribuées comme suit :

Urne	U_1	U_2	U_3
Nombre de boules blanches	4	3	1
Nombre de boules vertes	3	4	5

On choisit au hasard une urne et on tire une seule boule sachant que la boule tirée est blanche alors la probabilité p pour qu'elle soit de U_1 est

- A - $p = \frac{24}{49}$
- B - $p = \frac{4}{21}$
- C - $p = \frac{7}{18}$
- D - $p = \frac{8}{20}$
- E - $p = \frac{4}{7}$

Exercice 7

L'écriture exponentielle du complexe : $\frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i\sqrt{3}}$ est :

- A - $e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
- B - $-e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
- C - $2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
- D - $e^{\frac{4i\pi}{6}}$
- E - 2

Exercice 8

La forme algébrique du complexe : $(-1 + i)^{2012}$ est :

- A - 2^{2012}
- B - $2^{2012}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- C - $-2^{2012}\, i\sqrt{2}\, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- D - -2^{1006}
- E - -2^{2013}

Exercice 9

La limite de la suite :
$S_n = \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{3^{k+1}}\right)$ est :

- A - $\ln(3)$
- B - $-\infty$
- C - $\ln(e)$
- D - $+\infty$
- E - $-\ln(3 - e)$

Exercice 10

La limite l en 1 de la fonction R définie par : $R(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$ est :

- A - $l = \frac{1}{e^2}$
- B - $l = \frac{1}{e}$
- C - n'existe pas.
- D - $l = +\infty$
- E - $l = 0$.

Scanné avec CamScanner

Corrigé concours d'accès à la 1ère année de Médecine
Épreuve de Maths. 2012 - 2013

Exercice 1

Domaine de définition de f telle que :

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ est :

Soit D ce domaine ;

alors : $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 \neq 0 \text{ et } \dfrac{x-1}{x+1} > 0\right\}$

On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

D'où : $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Exercice 2

La dérivée de g telle que : $g(x) = \ln(\sqrt[3]{e^x})$

On a : $g(x) = \ln(\sqrt[3]{e^x})$

D'où : $g(x) = \dfrac{1}{3}\ln(e^x) = \dfrac{1}{3}x$

Par la suite : $g'(x) = \dfrac{1}{3}$

Exercice 3

La valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{\pi} 2e^x \sin(x)\, dx = 2I'$

On utilise une intégration par partie pour I'.

$\left.\begin{array}{l} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{array}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} u = e^x \\ v' = \sin x \end{array}\right.$

$I' = ([-e^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} ex \cos x\, dx)$

$\left.\begin{array}{l} u' = e^x \\ v = \sin x \end{array}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} u = e^x \\ v' = \cos x \end{array}\right.$

$I' = ([-e^x \cos x]_0^{\pi} + [e^x \sin x]_0^{\pi} - I'))$

$2I' = [e^x(\sin x - \cos)]_0^{\pi}$

$2I' = e^{\pi} + 1$; $I = e^{\pi} + 1$

Exercice 4

La solution générale de l'équation différentielle :

$y'' - 2my' + 2m^2y = 0$; $(m \in \mathbb{R}^*)$

On considère l'équation caractéristique :

$r^2 - 2mr + 2m^2 = 0$

$\Delta = 4m^2 - 8m^2 = -4m^2$

$r_1 = \dfrac{2m + 2mi}{2} = m + mi$

$r_2 = \overline{r_1} = m - mi$

D'où la solution générale est :

$y(x) = e^{mx}(a\cos(mx) + b\sin(mx)) \quad (a,b \in \mathbb{R})$

Exercice 5

L'intersection de la sphère : $S(\Omega(1,1,1), R = 1)$ et

$(P) : x - y + z + \sqrt{3} - 1 = 0$

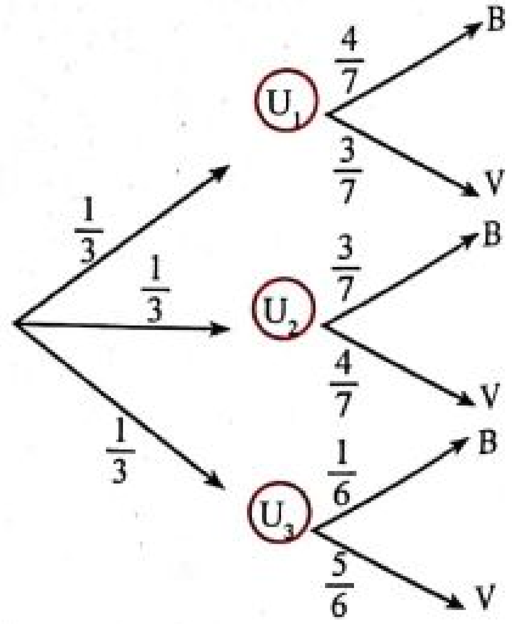
On a : $\Omega(1,1,1)$

Donc : $d(\Omega ; (P)) = \dfrac{|1 - 1 + 1 + \sqrt{3} - 1|}{\sqrt{3}} = 1$

Puisque $d(\Omega ; (P)) = 1$

Alors (P) coupe (S) en un seul point.

Exercice 6



Et on considère les deux événements :

- A : « La boule tirée est blanche » (A réalisé).
- B : « La boule tirée est de U_1 ».

On a : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Et utilisant l'arbre précédent on trouve :

$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{49}{126}$ et

$p(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$

Donc : $p_A(B) = \dfrac{\frac{4}{21}}{\frac{49}{126}} = \dfrac{24}{49}$

Exercice 7

L'écriture exponentielle du complexe :

$Z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{-1 + i\sqrt{3}}$

On a : $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ et $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc : $Z = \dfrac{2e^{-\frac{\pi}{6}i}}{2e^{\frac{2\pi i}{3}}} = e^{-\frac{\pi}{6}i - \frac{2\pi}{3}i}$

C'est-à-dire : $Z = e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

Exercice 8

La forme algébrique de : $U = (-1 + i)^{2012}$

On a : $-1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

D'où : $(-1 + i)^{2012} = \sqrt{2}^{\,2012} \cdot (e^{\frac{3\pi}{4}i})^{2012}$

$= 2^{1006} \cdot e^{\frac{6036\pi i}{4}}$

$= 2^{1006} \cdot e^{1509\pi i}$

$= 2^{1006}\, e^{\pi i} = -2^{1006}$.

Exercice 9

La limite de S_n tel que : $S_n = \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{3^{k+1}}\right)$

On a : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $\dfrac{e^k}{3^{k+1}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{e}{3}\right)^k$

D'où : $S_n = \ln\left(\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e}{3}\right)^k\right)$

$= \ln\left[\frac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1 - \left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e}{3}}\right)\right]$

Puisque : $-1 < \frac{e}{3} < 1$

Alors : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^{n+1} = 0$

Et puisque ln est continue sur $]0, +\infty[$

Alors : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln\left(\frac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{e}{3}}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{3 - e}\right) = -\ln(3 - e)$

Exercice 10

La limite l de la fonction R avec :

$R(x) = \dfrac{1}{x - 1} \int_1^x e^{-t^2}\, dt$

On a : $\forall t \in [1, x]$; $1 \le t \le x$

Donc : $-x^2 \le -t^2 \le -1$

D'où : $e^{-x^2} \le e^{-t^2} \le e - 1$

Par la suite :

$(\forall x > 1)$; $\int_1^x e^{-x^2}\, dt \le \int_1^x e^{-t^2}\, dt \le \int_1^x e^{-1}\, dt$

Donc : $\dfrac{1}{x - 1} \int_1^x e^{-x^2}\, dt \le R(x) \le \dfrac{1}{x - 1} \int_1^x e^{-1}\, dt$

D'où : $\dfrac{e - x^2}{x - 1} [t]_1^x \le R(x) \le \dfrac{e^{-1}}{x - 1} [t]_1^x$

Puisque : $(\forall x > 1)$; $e^{-x^2} \le R(x) \le e^{-1}$ et $\lim_{x \to 1} e^{-x^2} = e^{-1}$

Alors : $l = \lim_{x \to 1} R(x) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine et pharmacie

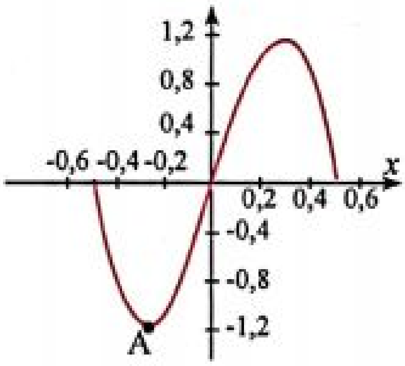
Casablanca 2012

Le nombre de question est 5 .

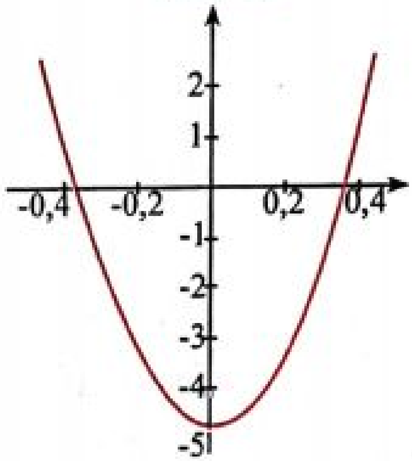
I - f est une fonction définie et dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ et sa courbe est courbe 1.

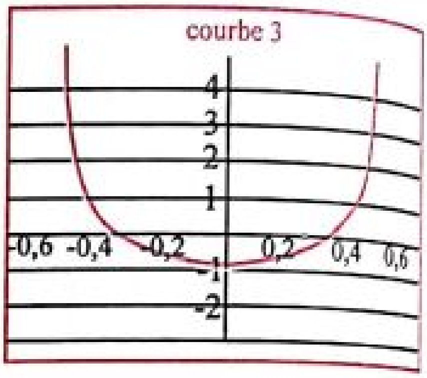
1) Parmi les courbes, ci-dessous ; laquelle représente la fonction dérivée de f.

courbe 1

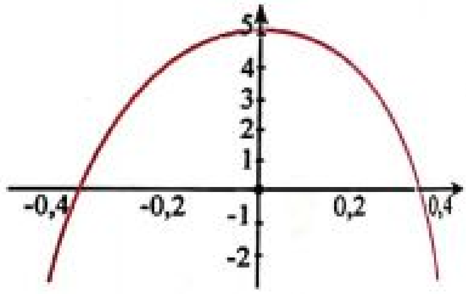


courbe 2





courbe 4



2) Répondre par oui ou non pour les propositions suivantes :

a - $f''(x)$ est négatif pour $x \in]-\frac{1}{2},0[$.

b - $f''(x)$ s'annule pour $x = 0$.

3) Donne une équation de la tangente a (Cf) au point $(-\frac{2}{5},-\frac{6}{5})$.

II - Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tel que : $|\overline{Z} - 3 + 2i| = 2$

III - Calculer les deux limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{3x^2+x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x-1} - 2x$

IV - Calculer les deux intégrales : $\int_1^{\pi} \cos x^2 \sin x \, dx$ et $\int_0^1 \frac{x}{x^4+2x^2+1}\, dx$

V - On considère la suite numérique $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = 2$ et $\ln(U_{n+1}) = 2 + \ln(U_n)$

1) Ecrire U_1 en fonction de e.

2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

3) Donner le sens de variation de $(U_n)_n$.

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Corrigé concours d'accès en 1ère année de Médecine et Pharmacie – Epreuve de Maths.

(Casablanca 2012)

I - 1 - D'après la courbe 1, on constate que f est décroissante sur $[-0,5;-0,3]$ et croissante sur $[-0,3;-0,3]$ et décroissante sur $[0,3 ; 0,5]$; d'où :

$\forall x \in [-0,5 ; -0,3] \cup [0,3 ; 0,5]$;

$f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [-0,3 ; 0,3]$; $f'(x) \geq 0$.

Et on sait que pour une fonction positive sa courbe est située au dessus de l'axe des abscisses et pour une fonction négative sa courbe est située au dessous de l'axe des abscisses.

Donc la courbe 4 répond à la question.

2) a - $f''(x) \leq 0$ pour $x \in]-\frac{1}{2},0[$ ça veut dire que la courbe de f est concave, or d'après la courbe 1, on constate que la courbe de f est convexe sur $[-\frac{1}{2},0]$; donc la proposition est fausse (non).

b - f'' s'annule en 0 ; ça veut dire que la courbe de f' admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 ; et on remarquant la courbe 4 ; on constate que la proposition est vraie (oui).

3 - L'équation de la tangente à (Cf) au point : $(-\frac{2}{5},-\frac{6}{5})$ est :

$y = f'(-\frac{2}{5})(x+\frac{2}{5}) + f(-\frac{2}{5})$;

avec : $f'(-\frac{2}{5}) = f'(-0,4) = -2$ et $f(-\frac{2}{5}) = -\frac{6}{5}$.

D'où : $y = -2(x+0,4) - \frac{6}{5} = -2x - 0,8 - \frac{6}{5} = -2x - 2$.

II - Ensemble des points $M(Z)$ tel que : $|\overline{Z} - 3 + 2i| = 2$

On a : $|\overline{Z} - 3 + 2i| = 2 \iff |\overline{Z} - (3+2i)| = 2$.

$\iff |\overline{Z} - (\overline{3+2i})| = 2$.

$\iff |\overline{Z - (3+2i)}| = 2$.

$\iff |Z - (3+2i)| = 2$.

D'où l'ensemble demandé est un cercle (C) de centre $A(3+2i)$ et de rayon 2.

III - On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{3x^2+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} - \sqrt{3+\frac{1}{x}}\right) = -\infty$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{3+\frac{1}{x}} = \sqrt{3}\right)$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+x-1} - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+x-1}-2x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

IV - On a :

- $\int_0^{\pi} \cos^4(x)\sin(x)\,dx = -\int_0^{\pi} \cos^4(x)(\cos x)'\,d(x)$

$= -\left[\frac{\cos^5(x)}{5}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{5}(\cos^5(\pi) - \cos^5(0))$

$= -\frac{1}{5}((-1)^5 - (1)^5) = -\frac{1}{5}(-2) = \frac{2}{5}$

- $\int_0^1 \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,d(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,d(x)$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,d(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}$.

V - 1) On a : $\ln(U_{0+1}) = 2 + \ln(U_0) = 2 + \ln(2)$

Donc : $U_1 = e^{2+\ln 2}$ (Car : $\ln(U_1) = 2 + \ln 2$)

2) On a : $U_{n+1} = e^{2+\ln(Un)}$ (Car : $\ln(Un+1) = 2 + \ln(Un)$)

3) On a : $U_{n+1} - U_n = e^{2+\ln(Un)} - e^{\ln(Un)}$

$= e^{\ln(Un)}[e^2 - 1]$

$= e^{\ln(Un)}(e-1)(e+1) > 0$

Donc la suite $(U_n)_n$ est croissante.

4) On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = e^{2+\ln(Un)} = e^2 U_n$

D'où la suite (Un)n est géométrique de raison e^2.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = U_0 (e^2)^n = U_0 e^{2n} = 2e2n$

Et puisque : $e^2 > 0$; alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^2)^n = +\infty$

Par la suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} Un = +\infty$

Scanné avec CamScanner

Epreuve de Mathématiques

2012

Question 1

Dans un laboratoire de production de médicaments, dispose de deux machines L_1 et L_2 pour la production des médicaments D_1. La machine L_1 assure 70% de la production du médicament D_1, alors que la machine L_2 assure 30% restante. 5% du médicament D_1 produit par L_1 n'est pas valable et 1% de celui de L_2 n'est pas aussi valable. On choisit au hasard un échantillon de ce médicament D_1. La probabilité pour que cet échantillon soit produit par la machine L_2 sachant qu'il n'est pas valable est :	A - $p = \frac{3}{38}$, D - $p = \frac{A_3^2}{70}$ B - $p = \frac{5}{38}$, E - $p = \frac{C_3^2}{70}$ C - $p = \frac{70}{380}$

Question 2

La limite en $+\infty$ de la suite : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est :	A - 2 ; D - $+\infty$ B - 0 ; E - 1 C - e

Question 3

L'ensemble des solutions complexes de l'équation: $Z^2 = \frac{8}{Z}$ est :	A - $S = \{2, -1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$ B - $S = \{2, 1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$ C - $S = \{2, 1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$ D - $S = \{2i, 1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$ E - $S = \{-2, 1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$

Question 4

L'ensemble de définition de la fonction : $f(x) = \sqrt{\lvert \ln(x) - 1 \rvert - 1}$ est :	A - $D =]0, +\infty[$ B - $D =]0, 1[\cup [e^2, +\infty[$ C - $D =]0, 1] \cup [e^2, +\infty[$ D - $S =]-\infty, 1] \cup [e^2, +\infty[$ E - $S =]e^2, +\infty[$

Question 5

L'intersection de la sphère : $S(\Omega(1, -2, 0), R = 3)$ et le plan : (P) : $x + y + z + (3\sqrt{3} + 1) = 0$ est :	A - Un segment B - Un cercle C - Un point D - Vide E - Un demi-cercle.

Question 6

La limite en $x = 2$ de la fonction : $g(x) = \dfrac{e^{2x} - e^4}{x - 2}$ est :

A - $l = 4$
B - $l = e^4$
C - $l = 2^{e4}$
D - $l = +\infty$
E - 0

Question 7

La valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^e \frac{\ln(2)}{x(\ln x)^2}\,dx$ est :

A - $I = 1 + \ln(2)$
B - $I = 1 - \ln(4)$
C - $I = 1 + \ln(4)$
D - $I = 1 - \ln(2)$
E - $I = e - \ln(2)$

Question 8

L'ensemble des solutions de l'inéquation :
$10^{2x} - 3.(10)^x - 4 > 0$
est :

A - $S =]0, \frac{\ln 2}{\ln 10}]$; D - $S = [\frac{\ln 2}{\ln 10'}, +\infty[$
B - $S =]0, \frac{\ln 10}{\ln 2}]$; E - $S =]\frac{\ln 4}{\ln 10'}, +\infty[$
C - $S = [\frac{\ln 10}{\ln 2}, +\infty[$

Question 9

La limite en $+\infty$ de la suite : $U_n = \dfrac{(-1)^n (n + 2^n)}{n2^{n+1}}$ est :

A - $L = +\infty$; D - $L = 2$
B - $L = 1$; E - $L = 0$
C - $L = \frac{1}{2}$

Question 10

La population statistique P(t) d'une bactérie dans une solution biologique vérifie l'équation différentielle : $\begin{cases} P'(t) = 2P(t), t \geq 0 \\ P(0) = 10 \end{cases}$
Le temps nécessaire pour avoir une population de 10^{21} pour cette bactérie est :

A - $t = 10\ln 10$; D - $t = (10\ln 10)^{10}$
B - $t = 10^{10}$; E - $t = 10(\ln 2)^{10}$
C - $t = (\ln 10)^{10}$

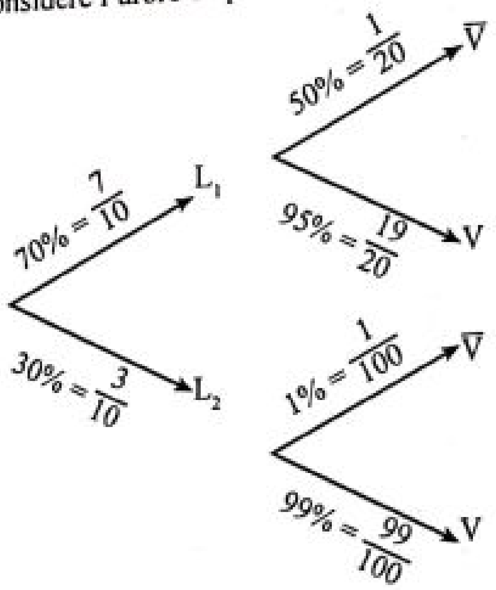
Scanné avec CamScanner

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques.

2012

Question 1

On considère l'arbre de possibilités suivant :



On considère les deux événements suivants :

A : « l'échantillon est produit par la machine L2»

B : « l'échantillon n'est pas valable »

On a : $p = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Suivant l'arbre on a :

$p(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{20} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{38}{1000}$

$p(A \cap B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{1000}$

Donc : $p = \frac{3}{38}$.

Question 2

Calculons la limite : $l = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ telle que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

On a : $\forall k \in = \{1, 2, \ldots, n\}$; $1 \leq k \leq n$

Donc : $1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$

Et : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$

Et par suite : $\frac{1}{\sqrt{n}} . n \leq S_n \leq 1 . n$

C'est-à-dire : $(\forall n \geq 1)$; $\sqrt{n} \leq Sn \leq n$

Et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$!

Alors : $l = +\infty$

Question 3

L'ensemble S des solutions de l'équation $Z^2 = \frac{8}{Z}$ dans $\mathbb{C}$.

On a : $\forall Z \in \mathbb{C}^*$;

$Z^2 = \frac{8}{Z} \Leftrightarrow Z^3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (Z-2)(Z^2 + 2Z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow Z = 2$ ou $Z^2 + 2Z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = -12$

$\Leftrightarrow Z = 2$ ou $Z = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2}$ ou $Z = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow Z = 2$ ou $Z = -1 + i\sqrt{3}$

ou $Z = -1 - i\sqrt{3}$

Donc : $S = \{2, -1 + i\sqrt{3} ; -1 - i\sqrt{3}\}$.

Question 4

L'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$f(x) = \sqrt{|\ln(x) - 1| - 1}$.

Soit D l'ensemble de définition de la fonction f ; on a :

$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 ; |\ln(x) - 1| - 1 \geq 0\}$

* $x > 0$
* $|\ln(x) - 1| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |\ln(x) - 1| \geq 1$

$\Leftrightarrow \ln(x) - 1 \geq 1$ ou $\ln(x) - 1 \leq -1$

$\Leftrightarrow \ln(x) \geq 2$ ou $\ln(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow x \geq e^2$ ou $x \leq 1$

$\Leftrightarrow (x \geq e^2$ ou $x \leq 1)$ et $x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]0,1] \cup [e^2, +\infty[$

Donc : $D =]0,1] \cup [e^2, +\infty[$.

Scanné avec CamScanner

Question 5

L'intersection de la sphère : $S(\Omega(1, -2, 0)\ ,\ R = 3)$ et le plan : $(P) : x + y + z + (3\sqrt{3} + 1) = 0$:

On a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|1 - 2 + 0 + 3\sqrt{3} + 1|}{\sqrt{3}} = 3$

Et puisque : $d(\Omega;(P)) = R$

- Alors l'intersection est un point.

Question 6

La limite en $x = 2$ de la fonction g telle que :

$g(x) = \dfrac{e^{2x} - e^4}{x - 2}$

Posons : $f(x) = e^{2x}$

On a f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

- Donc : $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= f'(2) = 2e^4$

- D'où : $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 2e^4$

Question 7

La valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^e \frac{\ln(2)}{x(\ln x)^2}\,dx$

- On a : $I = \ln(2) \displaystyle\int_2^e \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\,dx$

$= \ln(2) \displaystyle\int_2^e \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}\,dx$

$= \ln(2)\left[-\dfrac{1}{(\ln x)}\right]_2^e$

$= \ln(2)\left[-1 + \dfrac{1}{\ln(2)}\right]$

$= 1 - \ln(2).$

Question 8

L'ensemble des solutions de l'inéquation :

$10^{2x} - 3.(10)^x - 4 > 0$

Posons : $X = 10^x$

Alors l'inéquation devient : $X^2 - 3X - 4 > 0$

On a : $\Delta = 25\ ;\ X_1 = -1\ ;\ X_2 = 4$

- D'où : $X^2 - 3X - 4 > 0 \iff (X + 1)(X - 4) > 0$

$\iff (10^x + 1)(10^x - 4) > 0$

Et puisque : $(10^x + 1 > 0)$

Alors : $(10^x + 1)(10^x - 4) > 0 \iff 10^x - 4 > 0$

$\iff 10^x > 4$

$\iff \ln(10^x) > \ln(4)$

$\iff x\ln(10) > \ln(4)$

$\iff x > \dfrac{\ln(4)}{\ln(10)}$ $(\ln 10 > 0)$

$\iff x \in \left]\dfrac{\ln(4)}{\ln(10)}\ ;\ +\infty\right[$

Donc : $S = \left]\dfrac{\ln(4)}{\ln(10)}\ ;\ +\infty\right[$

Question 9

La limite en $+\infty$ de la suite $(U_n)_n$ telle que :

$U_n = \dfrac{(-1)^n(n + 2^n)}{n2^{n+1}}$

- On a : $|U_n| = \dfrac{n + 2^n}{n2^{n+1}}$

$= \dfrac{n}{n2^{n+1}} + \dfrac{2^n}{n2^{n+1}}$

$= \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2n}$

- Donc : $-\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^n}\right) \leq U_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^n}$

- Et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^n} = 0$

- Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Question 10

- On a : $P'(t) = 2P(t)\ ,\ t \geq 0\ ;\ P(0) = 10$

Donc la solution de l'équation différentielle est :

$P(t) = ae^{2t}\ ;\ (a \in \mathbb{R})$

$P(0) = 10 \iff a = 10$

Donc : $(\forall t > 0\ ;\ p(t) = 10e^{2t}.$

Le temps nécessaire pour avoir une population de 10^{21} pour cette bactérie est :

- On a : $P(t) = 10e^{2t}$

$P(t) = 10^{21} \iff 10e^{2t} = 10^{21} \iff e^{2t} = 10^{20}$

$\iff \ln(e^{2t}) = \ln(10^{20}) \iff 2t = 20\ln(10)$

$\iff t = 10\ln(10)$

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine et pharmacie, Epreuve de Maths. Casablanca 2011

Le nombre de question est 5 .

I - On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 8$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Calculer la limite : $\lim_{x \to 0} f(x)$

2) La courbe (C) admet une tangente horizontale, déterminer son équation.

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = 2|x|^3 - 6\ln|x| + 8$ et soit (C') sa courbe représentative.

3 .1) Répondre par oui ou non pour les propositions suivantes :

a - $f(x) = g(x)$

b - $f(x) = g(-x)$

c - $f(x) = -g(x)$

d - $g(-x) = g(x)$

3.2) Donner le point ou les points $(x, g(x))$ par lesquels passent des tangentes horizontales s'elles existent.

II- Soit (E) l'équation différentielle : $y' = 3y - 6x + 8 + \frac{1}{x} - 3\ln(x)$.

Déterminer les valeurs des réels a et b pour la fonction

$h : x \to ax + b + \ln(x)$ soit une solution particulière de l'équation (E).

III - Calculer les deux limites : $\lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2+1}\right)$ et $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2}$.

IV - Calculer les deux intégrales : $\int_{\sqrt{2}}^{3} \sqrt{(10x^2 - x^4)}dx$ et $\int_{-3}^{0} (2x+3)\ e^{x^2+3x}\ dx$

V - L'espace est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

A(12, -12, 9) ; B(12, 8, 24) C(-8, 17, 12) et D(-8, -3, -3).

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD.

VI - Une urne contient 10 boules ; 6 blanches et 4 noires. On tire aléatoirement successivement deux boules de l'urne.

1) Calculer P_1 la probabilité d'avoir 2 boules de même couleur si le tirage est avec remise.

2) Calculer P_2 la probabilité d'avoir 2 boules blanches si le tirage est sans remise.

3) Calculer P_3 la probabilité d'avoir au moins une boule blanche si le tirage est sans remise.

Corrigé concours d'accès en 1ère année de Médecine et Pharmacie – Epreuve de Maths.

(Casablanca 2011)

I - 1) On a : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim 2x^3 - 6\ln(x) + 8 = +\infty$

Car : $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} 2x^3 = 0$

2) On a pour tout réel x de : $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2.3x^2 - \frac{6}{x} = 6\left(\frac{x^3 - 1}{x}\right) = \frac{6(x-1)(x^2+x+1)}{x}$$

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est -3 ; donc l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

donc ; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

D'où la courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ; d'équation :

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = f(1) = 10$

3) On remarque que : $g(x) = 2|x|^3 - 6\ln|x| + 8$

$$= 2(|x|^3) - 6\ln|x| + 8$$

$$= f(|x|)$$

a - On a : $Df = \mathbb{R}^{+*}$ et $Dg = \mathbb{R}^*$; donc : $f \neq g$ (non)

Donc la proposition (a) est fausse.

b - On a : $g(-x) = 2(|-x|^3) - 6\ln|x| + 8$

$$= 2(-x)^3 - 6\ln|-x| + 8$$

$$= 2|x^3| - 6\ln|x| + 8$$

Puisque on ne connaît pas le signe de x ; donc la proposition (b) est fausse.

c - On a aussi : $f(x) \neq -g(x)$

D'où la proposition (c) est fausse.

d - D'après ce qui précède ; on a : $g(-x) = g(x)$.

D'où la proposition (d) est vraie.

III - On a : $\lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{1}{4x^4+2x^2}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{4x^4+2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{4x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

- On a : $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$

$$= \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} = 0$$

IV - On a : $\int_{\sqrt{2}}^{3} \sqrt{(10x^2 - x^4)}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{3} x\sqrt{10 - x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{3} (10 - x^2)'(10 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(10 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{2}}^{3} = -\frac{1}{3}\left(10 - \frac{9}{4} - 10 + 2\right) = \frac{1}{12}$$

- On a : $\int_{-3}^{6} (2x+3)e^{x^2+3x} + x^2\,dx$

$$= \int_{-3}^{6} (x^2+3)'\,e^{x^2+3x}\,dx \int_{-3}^{6} x^2\,dx.$$

$$= \left[e^{x^2+3x}\right]_{-3}^{6} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{6} = e^{36+18} - e^{9-9} + \frac{(6)^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}$$

$$= e^{54} - 1 + 72 + 9 = e^{54} + 80.$$

V - On a : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0)^2 + (20)^2 + (15)^2} = |\overrightarrow{DC}| = DC$

I - 1) $BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(20)^2 + (9)^2 + (12)^2} = |\overrightarrow{AD}| = AD$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (0)(-20) + (20)(9) + (15)(-12) = 0$

D'où ABCD est un rectangle.

1) Le tirage est successif avec remise ; donc il y a l'ordre et répétition ; d'où :

$$P_1 = \frac{6^2 + 4^2}{10^2} = \frac{36 + 16}{100} = \frac{52}{100} = \frac{26}{50} = \frac{12}{25}.$$

2) Le tirage est successif et sans remise ; donc il y a l'ordre mais sans répétition ; donc :

$$P_2 = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{{}^{2}\cancel{6} \times \cancel{5}^{1}}{{}^{5}\cancel{10} \times \cancel{9}^{3}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{26}{50} = \frac{12}{25}$$

3) Soit C l'événement " Avoir au moins une boule blanche " et $\overline{C}$ c'est l'événement contraire de C " pas de boule blanche tirée ".

- On a : $P(\overline{C}) = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{{}^{2}\cancel{4} \times \cancel{3}^{1}}{{}^{5}\cancel{10} \times \cancel{9}^{3}} = \frac{2}{15}$
- D'où : $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} = P_3.$

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine
Epreuve de Maths — 2010 - 2011

Question 1

Une urne contient 34 jetons, sur chacun des jetons écrit une lettre de phrase suivante : " GAGNER LA COUPE DU MONDE EN AFRIQUE DU SUD ". On tire successivement et avec remise 12 jetons de l'urne, la probabilité, pour qu'on puisse formé la phrase " ESPAGNE GAGNE " est :	A - $p = \frac{5^3 . 3^2 . 3^2}{34^{12}}$, D - $\frac{A_5^3 . A_3^2 . A_3^2}{34^{12}}$ B - $p = \frac{5^3 . 3^4 . 2^3}{34^{12}}$, E - $p = \frac{C_5^3 . C_3^2 . C_3^2}{C_{34}^{12}}$ C - $p = \frac{A_5^3 . A_3^2 . A_3^2}{A_{34}^{12}}$

Question 2

La limite de la suite : $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ est :	A - e^{-1} ; D - $+\infty$ B - 0 ; E - 1 C - e

Question 3

La valeur complexe : $(1 + i\sqrt{3})^{2010} + (-1 - i\sqrt{3})^{2010}$ est :	A - 2^{2009} ; D - $2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) e^{\frac{i4\pi}{3}}$ B - $2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) e^{\frac{i2\pi}{3}}$; E - 2^{2011} C - $2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) e^{\frac{i2\pi}{3}}$

Question 4

La limite de la fonction : $f(x) = \exp\left(x + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ au voisinage de $+\infty$ est :	A - $l = 1$; D - $l = -1$ B - Absent ; E - $l = +\infty$ C - $l = 0$

Question 5

L'ensemble des points M dans l'espace qui vérifié : $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 0$ est :	A - Droite B - Cercle C - Sphère D - Demi-cercle E - Plan.

Question 6

La dérivée de la fonction g telle que : $g(x) = \ln(\sqrt[3]{x}), x > 0$ est :	A - $g'(x) = \frac{1}{3x}$; D - $g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ B - $g'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$; E - $g'(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ C - $g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

Question 7

La valeur de l'intégrale : $I = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx$ est :	A - $J = \frac{1}{n+1}$; D - $J = \frac{2e}{n}$ B - $J = \frac{e}{n+1}$; E - $J = \frac{1}{n}$ C - $J = \frac{2e}{n+1}$

Question 8

L'ensemble de solution de l'inéquation : $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 2$ est :	A - $S = \left]-\infty, \frac{-\ln 2}{\ln 3}\right]$; B - $S = \left[-\infty, \frac{\ln 3}{\ln 2}\right[$ C - $S = \left]\frac{\ln 3}{\ln 2}, +\infty\right]$; D - $S = \left]\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$ E - $S = \emptyset$

Question 9

La valeur de la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$ est :	A - $S_n = n^{2n-1}$; D - $S_n = 2^n$ B - $S_n = (n-1)^{2n}$; E - $S_n = n3^n-1$ C - $S_n = n2^n$

Question 10

La valeur de la somme : $S = \sum_{k=0}^{2011} (i)^k$ est :	A - $S = 0$; D - $S = \frac{-2i}{1-i}$ B - $S = \frac{2}{1-i}$; E - $S = \frac{1+i}{1-i}$ C - $S = \frac{2i}{1-i}$

Question 1

La phrase « GAGNER LA COUPE DU MONDE EN AFRIQUE DU SUD » se compose de 34 lettres distribuées comme suit :

A	C	D	E	F	G	I	M	N	L	O	P	S	R	Q	U
3	1	4	5	1	2	1	1	3	1	2	1	1	2	1	5

Soit Ω l'univers de possibilités.

On a : Card Ω est : Card $\Omega = 34^{12}$

Pour avoir la phrase : " Espagne GAGNE "

On a besoin de :

A	E	G	N	P	S
2	3	3	2	1	1

Soit H l'événement pour avoir cette phrase ; on a :

Card H$= 3^2.5^3.2^3.3^2.1^1.1^1$

$= 5^3.3^4.2^3$

D'où la probabilité demandée est : $p(H) = \dfrac{5^3.3^4.2^3}{34^{12}}$

Question 2

La limite de $(U_n)_n$

Avec : $U_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$

On a : $U_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$

$U_n = e^{-\sqrt{n}\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]} = e^{-\frac{\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}} = -1$

Et puisque la fonction exp est continue en (-1) ;

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Question 3

La valeur du complexe :

$Z = (1 + i\sqrt{3})^{2010} + (-1 - i\sqrt{3})^{2010}$

On a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$= 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

D'où : $(1 + i\sqrt{3})^{2010} = 2^{2010}\,.\,e^{i\frac{4020\pi}{3}}$

$= 2^{2010}\,.\,e^{i1340\pi} = 2^{2010}$

Car : $(13040\pi \equiv 0\ [2\pi]$

Et on a : $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$= 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$

D'où : $(-1 - i\sqrt{3})^{2010} = 2^{2010}\,.\,e^{i\frac{8040\pi}{3}}$

$Z = 2^{2010}\,.\,e^{i2680\pi} = 2^{2010}$

Par la suite : $Z = 2^{2010} + 2^{2010} = 2.2^{2010} = 2^{2011}$

Question 4

La limite de la fonction f définie par :

$f(x) = \exp\left(x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

Par la suite on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Scanné avec CamScanner

Question 5

L'ensemble des points M de l'espace tel que :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

C'est la sphère dont [AB] est un diamètre.

Question 6

La dérivée de g telle que : $g(x) = \ln(\sqrt[3]{x}), x > 0$

On a : $(\forall x > 0)$; $\ln(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\ln(x)$

Donc : $(\forall x > 0)$; $g(x) = \frac{1}{3}\ln(x)$

D'où : $(\forall x > 0)$; $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$

Question 7

La valeur de l'intégrale : $I = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\,dx$

On a : $I = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\,dx$

$= \int_1^e \frac{1}{x}(\ln(x))^n\,dx$

$= \int_1^e (\ln(x))'\,(\ln(x)^n\,dx$

$= \left[\frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}\right]_1^e$

$= \frac{1}{n+1}$

Question 8

L'ensemble de solutions de l'inéquation : $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 2$

Soit S cet ensemble.

On a : $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 2 \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right) \geq \ln(2)$

$\iff x\ln\left(\frac{1}{3}\right) \geq \ln(2)$

$\iff -x\ln(3) \geq \ln(2)$

$\iff x \in -\frac{\ln 3}{\ln 2}$

$\iff x \in \left]-\infty, -\frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$

$S = \left]-\infty, -\frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$

Question 9

La valeur de la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

On sait que : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

D'où : $kC_n^k = \frac{kn!}{k!(n-k)!}$

$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$

$= \frac{n.(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]}$

$= n.C_{n-1}^{k-1}$

Donc : $S_n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

$= \sum_{n=1}^{k=n} n.C_{n-1}^{k-1}$

$= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}$

$= n.2^{n-1}$

On rappelé que : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

Question 10

La valeur de la somme : $S = \sum_{k=0}^{2011} (i)^k$

On a S c'est la somme des termes successifs d'une suite géométrique de raison i ; d'où :

$S = i^0\left(\frac{1-i^{2011+1}}{1-i}\right)$

$S = \frac{1-i^{2012}}{1-i}$

Puisque : $i^2 = -1$

Alors : $i^{2012} = (i^2)^{1006} = (-1)^{1006} = 1$

D'où : $S = \frac{1-1}{1-i} = 0$

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine et pharmacie
2010 (CASABLANCA)

Le nombre de questions est 5 :

I- On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{2x+4} & ; x \leq 7 \\ f(x) = (x-a)^2 - 7 & ; x > 7; \end{cases}$ (avec a $\in \mathbb{R}$)

1) Déterminer la valeur de a (a > 7) pour que f soit continue en 7.

2) On donne : $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x - 10}{4(x+2)^2}$; $x \leq 7$.

Répondre vraie ou faux pour les propositions suivantes :

a- La fonction f est croissante sur $]-\infty;5]$

b- La courbe de f admet une asymptote d'équation : $y = \dfrac{x}{2} - 4$.

c- La fonction f est décroissante sur [7,9].

3) La courbe de f admet trois tangentes horizontales aux points A,B et C. Déterminer A, B et C.

II- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \ln(e^{2x} + 1)$

1) Marquer la réponse juste parmis celles proposées :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, on peut écrire $h(x)$: $\begin{cases} h(x) = \ln e^{2x} + \ln x \\ h(x) = \ln e^{2x} \\ h(x) = x^2 + \ln(e^{2x} + 1) \\ h(x) = 2x + \ln(1 + e^{-2x}) \\ h(x) = 2x\ln(1 + e^{-2x}) \end{cases}$

2) Écrire faux ou vraie devant chaque proposition :

a- La fonction est la composée de deux fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b- L'axe des abscisses est une asymptote à (Ch) au voisinage de $-\infty$.

c- La droite d'équation : $y = 2x$ est une asymptote à (C_h) au voisinage de $+\infty$.

d- La courbe (C_h) est située au-dessous de l'axe des abscisses.

III- Calculer les deux limites : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2 + 4x - 5}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} - x$

IV- Calculer les deux intégrales : $\int_1^3 |2x^2 - 8|\,dx$; $\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos 4x + 2\sin 2x)\,dx$

V- On considère la suite $(Xn)_n$ définie par :

$X_0 = 40$ et $X_{n+1} = \dfrac{2}{3}X_n + 10$, $\forall n \in N$

On pose : $U_n = X_n - 30$, $(\forall n \in N$

1) Déterminer la nature et la raison de la suite numérique $(Un)_n$.

2) Déterminer le sens de variation de la suite $(Xn)_n$.

3) Calculer la limite : $\lim X_n$

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Médecine et Pharmacie

2010 (CASA BLANCA)

I-1) f est continue à droite en 7 ssi $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = f(7)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = f(7)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 7^+} (x-a)^2 - 4 = \dfrac{(7)^2 - 6(7) - 7}{2(7)+4}$

$\Leftrightarrow (7-a)^2 - 4 = \dfrac{49-42-7}{14+4} = 0$

$\Leftrightarrow (7-a-2)(7-a+2) = 0$

$\Leftrightarrow (5-a)(9-a) = 0$

$\Leftrightarrow a = 5$ ou $a = 9$

$\Leftrightarrow \boxed{a=9}$ (car : $a > 7$)

2) a- On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$;

d'où le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-5		1		7
$f'(x)$		+	ϕ	-	ϕ	+	

Par la suite la proposition « f est croissante sur $]-\infty,5]$ » est fausse.

b- On a : $(\forall x \neq -2)$;

$$f(x) = \frac{(2x+4)\left(\frac{x}{2}-4\right)+9}{2x+4} = \frac{x}{2} - 4 + \frac{9}{2x\,\frac{4}{9}}$$

Et : $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2}-4\right) = \lim\limits_{n\to-\infty} = \dfrac{9}{2x+4} = \dfrac{x}{2} - 4 = 0$

D'où la courbe de f admet une asymptote d'équation : $y = \frac{x}{2} - 4$ au voisinage de $-\infty$.

D'où la proposition est vraie.

c- La proposition « f est décroissante sur [7,9] » est fausse.

3) • On a : $\forall x \in]-\infty,7]$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -5$.

D'où la courbe admet sur $]-\infty,7]$; deux tangentes horizontales aux points A(1,-2) et B(-5,-8).

• Puisque : $(\forall x \in]7,+\infty[$; $f(x) = (x-9)^2 - 4$;

Alors : $f'(x) = 2(x-9) = 0 \Leftrightarrow x - 9 = 0$

D'où la courbe de f admet sur $]7,+\infty[$ une tangente horizontale.

II- On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$;

$h(x) = \ln(e^{2x}+1) = \ln(e^{2x}(1+e^{-2x}))$

$\ln(e2x) + \ln(1 + e\text{-}2x) = 2x + \ln(1 + e\text{-}2x)$

D'où la proposition n°4 est vraie.

a- On a : $x \overset{u}{\longmapsto} e^{2x}+1$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$; car $(\forall x \in \mathbb{R})$; $u'(x) = 2e^{2x} > 0$;

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $u(x) > 1$.

Et la fonction ln est strictement croissante sur $]1,+\infty[$; d'où la fonction h est la composée de deux fonctions strictement croissantes ; d'où la proposition (a) est vraie.

b- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{2x}+1) = \ln(1) = 0$

D'où la proposition (b) est vraie.

c- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = \ln(1) = 0$

D'où la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C_h) au voisinage de $+\infty$; par la

d- On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^{2x} + 1 > 1$;

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\ln(e^{2x}+1) > 0$

C'est-à-dire (C_h) est située au-dessus de l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}$ par la suite la proposition (d) est fausse.

III- On a :

• $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to 1} = \dfrac{(x-1)}{(x-1)(x+5)}$

$\lim\limits_{x\to 1} = \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{6}$

Scanné avec CamScanner

Et : ** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2} + x} = 0$

IV- On a :

• $\int_1^3 |2x^2 - 8|\,dx =$

$\int_1^2 |2(x^2-4)\,dx + \int_2^3 |2(x-2)(x+2)|\,dx$

$= -\int_1^2 (2x^2-8)\,dx + \int_2^3 (2x^2-8)\,dx$

$= -\left[\frac{2}{3}x^3 - 8x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^3 - 8x\right]_2^3$

$= -\left(\frac{2}{3}.8 - 16 - \frac{2}{3} + 8\right) + \left(\frac{2}{3}.27 - 24 - \frac{2}{3}.8 + 16\right)$

$= -\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 + 18 - 24 - \frac{16}{3} + 16$

$= \frac{-32+2}{3} + 18 = 8$

** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos 4x + 2\sin 2x)\,dx$

$= \left[\frac{3}{4}\sin 4x - \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{3}{4}\sin 2\pi - \cos\pi\right) - \left(\frac{3}{4}\sin 0 - \cos 0\right)$

$= 1 + 1 = 2$

V- On a :

1) $(\forall x \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = X_{n+1} - 30 = \frac{2}{3}X_n + 10 - 30$

$= \frac{2}{3}X_n - 20 = \frac{2}{3}\left(X_n - 20 \times \frac{3}{3}\right)$

$= \frac{2}{3}(X_n - 30) = \frac{2}{3}U_n.$

Donc la suite $(Un)_n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

2) On a : $U_n = U_0\left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc : $U_n = 10\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Et on a : $X_n = U_n + 30$ (Car : $U_n = X_n - 30$)

D'où : $X_n = 10\left(\frac{2}{3}\right)^n + 30$

On a : $X_{n+1} - X_n = 10\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 30 - 10\left(\frac{2}{3}\right)^n - 30$

$= 10\left(\frac{2}{3}\right)^n\left[\frac{2}{3} - 1\right] = -\frac{1}{3}.10.\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0$

D'où la suite $(X_n)^n$ est décroissante.

3) Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (X_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} 10\left(\frac{2}{3}\right)^n + 30 = 30$

car : $0 < \frac{2}{3} < 1$)

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine Dentaire

Juillet 2010 (RABAT)

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + xe^{x})$

1) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a- Montrer que : $f(x) = x + \mathrm{L}nx + \mathrm{L}n(1 + \frac{1}{xe^{x}})$

b- Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x-1}$

1) Vérifier que pour tout x de $[1,+\infty[$; on a

$$g(x) - 2 = \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} \quad \text{et} \quad g(x) - x = \frac{(x-2)^2}{2\sqrt{x-1}+x}$$

2) On considère la suite $(Un)_n$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2\sqrt{U_n - 1} \end{cases} \quad (n \geq 0)$

a- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $Un \geq 2$

b- Montrer que la suite $(Un)_n$ est décroissante.

c- En déduire que la suite $(Un)_n$ est convergente, puis calculer sa limite.

Exercice 3

1) Vérifier que : $\left(\forall n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) \quad \frac{(\sin x)^2}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x$

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ par : $F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

a- Vérifier que : $F(\frac{\pi}{3}) = \ln(2 + \sqrt{3})$

b- Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f définie sue $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

c- Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^2}{\cos x} dx$.

Exercice 4

Une urne A contient deux boules noires et une boule blanche, et une urne B contient une boule noire et deux boules blanches. Toutes les boules dans les deux urnes sont indiscernables au toucher. On tire aléatoirement successivement et sans remise deux boules de l'urne A et on tire une seule boule de l'urne B. (Le nombre de boules tirées est 3).

1) Calculer la probabilité d'avoir 3 boules de même couleur.

2) Calculer la probabilité d'avoir deux boules blanches et une boules noire.

Scanné avec CamScanner

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Médecine Dentaire

Juillet 2010 (RABAT)

Exercice 1

1) On a : $f(x) = \ln(1 + xe^x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + xe^x) = +\infty$ (Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln X = +\infty$)

(et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + xe^x = +\infty$)

2) a- On a ; $\forall x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) = \ln(1 + xe^x) = \ln\left(xe^x\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)\right)$$

$$= \ln(xe^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$$

$$= \ln x + \ln e^x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$$

Donc : $f(x) = x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$

b- On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

Exercice 2

1) * Vérifions que : $\forall x \in [1,+\infty[$.

On a : $g(x) - x = \dfrac{(x-2)^2}{2\sqrt{x-1} + x}$

On a : $g(x) - x = 2\sqrt{x-1} - x =$

$$\frac{(2\sqrt{x-1} - x)(2\sqrt{x-1} - x)}{2\sqrt{x-1} + x} = \frac{4(x-2) - x^2}{2\sqrt{x-1} + x}$$

D'où : $g(x) - x = \dfrac{-(x^2 - 4x + 4)}{2\sqrt{x-1} + x} = \dfrac{-(x-2)^2}{2\sqrt{x-1} + x}$

** Vérifions que pour tout $x \in [1,+\infty[$,

On a : $g(x) - 2 = \dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x-1} + 1}$

On a : $g(x) - 2 = 2\sqrt{x-1} - 2 = 2\sqrt{x-1} - 1)$

$$= \frac{2(x-1-1)}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}$$

2) a- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 2$.

On a : $U_0 = 3$ et $3 > 2$, d'où : $U_0 \geq 2$.

Supposons que $U_n \geq 2$; et montrons que : $U_{n+1} \geq 2$ On a : $U_n \geq 2$ d'où : $U_n - 1 \geq 1$;

donc : $\sqrt{U_n - 1} \geq 1$

Par la suite : $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n - 1} \geq 2$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 2$.

b- Montrons que la suite $(Un)_n$ est décroissante :

On a : $(\forall_n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} - U_n = 2\sqrt{U_n - 1} - U_n$

$$= g(U_n) - U_n$$

D'où : $U_{n+1} - U_n = -\dfrac{(U_n - 2)^2}{2\sqrt{U_n - 1} + U_n} \leq 0$

(Car : $U_n \in [2,+\infty[$).

Par la suite $(Un)_n$ est décroissante.

c- * Puisque la suite $(Un)_n$ est décroissante et minorée par 2, alors elle est convergente.

** On a g est continue sur $[1,+\infty[$ et :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} U_{n+1} = \ell \\ 2\sqrt{\ell - 1} = \ell \end{cases}$$

et 1 n'est pas solution de l'équation $g(\ell) = \ell$.

Donc : $(\ell - 2)^2 = 0 \iff 1 = 2$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 2$

Exercice 3

1) Vérifions que : $\frac{(\sin x)^2}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)$

On a : $\frac{(\sin x)^2}{\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x^2}{\cos x}$

$= \frac{1}{\cos x} - \cos x$

2) a- On a : $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$$\ln\left[\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}.1}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{3+6\sqrt{3}+9}{6}\right] = \ln\left[2+\sqrt{3}\right].$$

b- F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et on a :

$$F(x) = \frac{\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]'}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{2}{2}.\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

D'où F est une primitive de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)$$

c- On a : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^2}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)dx$

$$= \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 4

1- Soit C l'événement « Avoir 3 boules de mêmes couleur »

On a : $P(C) = \frac{\text{Carad(C)}}{\text{Carad}(\Omega)} = \frac{A_2^2}{A_3^2} \cdot \frac{A_1^1}{A_3^1}$

$= \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2) Soit D l'événement « Avoir deux boules blanches et une boule noire »

On a : $P(D) = \frac{\text{Carad(C)}}{\text{Carad}(\Omega)} = 2.\frac{A_2^1}{A_3^1} \cdot \frac{A_1^1}{A_2^1} \cdot \frac{A_2^1}{A_3^1}$

$= \frac{2.2.1.2}{3.2.3} = \frac{4}{9}$

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine Dentaire

2010 (RABAT)

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ell n\left(1+\frac{x}{2}\right) ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a-Montrer que : $(\forall x > 0)$; $f(x) = x\ell n(x+2) - x\ell nx$

b-En déduire que f est continue à droite en O.

2)Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\left(\text{ou pose : } t = \frac{2}{x}\right)$

Exercice 2

1)Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$

2)On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

a-Vérifier que : $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x+1}$

b-En déduire la valeur de : $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $U_n = \ln\left(\frac{2^n}{n}\right)$

a-Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = n\left(\ln 2 - \frac{\ln n}{n}\right)$

b-Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$; puis déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2^n}{n}$

Exercice 4

Une urne contient deux boules numérotées 0, 0 et trois boules numérotées 1, 1, 1 ; On ne peut distinguer entre les boules par la toucher.

On tire aléatoirement successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1)Calculer la probabilité de tirer deux boules qui portent le même numéro.

2)Calculer la probabilité d'avoir deux boules dont le produit des numéros portés est nul.

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Medécine Dentaire

2010 (RABAT)

Exercice 1

On a : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a- Montrons que : ($\forall x > 0$) ;
$f(x) = x\ln(x+2) - x\ln x$

On a : $f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = x\left(\ln(x+2) - \ln(x)\right)$

$= x\ln(x+2) - x\ln(x)$

b- Montrons que f est continue à droite en O.
On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+2)\, x\ln(x) = 0 = f(0)$.

D'où f est continue à droite en O.

2) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

On pose : $t = \frac{2}{x}$; donc : $t \to 0^+$ et $x = \frac{2}{t}$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2}{t}\ln(1+t)$

$= 2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 2\times 1 = 2$

Exercice 2

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1}$

2) a- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + f'(x)$

$= e^{-x}\ln\left(1+e^x\right) + \left(-e^{-x}\left(\ln(1+e^x)\right)\right) + \frac{e^{-x}.e^x}{e^x+1}$;

$= \frac{e^x}{e^x+1}$

b- On a : $f(x) = \frac{1}{e^x+1} - f'(x)$

D'où : $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{e^x+1} - f'(x)\right)dx$

Donc : $\int_0^{\ln 2} f(x)dx =$

$\int_0^{\ln 2}\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx - \int_0^{\ln 2} f'(x)$

$= \left[x - \ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2} - \left[f(x)\right]_0^{\ln 2}$

$= \ln 2 - \ln(e^{\ln 2}+1) - 0 + \ln(e^0+1) - f(\ln 2)\, f(0)$

$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 - e^{-\ln 2}(1 + e^{\ln 2}) - e^0\ln(e^0+1)$

$= 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2}(3) - \ln 2$

$= \ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$

Exercice 3

1) a- On a pour tout $n\, \mathbb{N}^*$: $Un = \ln\left(\frac{2^n}{n}\right) =$

$\ln 2^n - \ln(n) = n\ln 2 - \ln n = n\left(\ln 2 - \frac{\ln n}{n}\right)$

b- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} Un = \lim\limits_{x\to+\infty} n\left(\ln 2 - \frac{\ln n}{n}\right) = +\infty$

(Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2^n}{n}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(X) = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n} = +\infty$

(On peut remarquer que $\frac{2^n}{n} = e^{\ln\left(\frac{2^n}{n}\right)}$

Exercice 4

1) La probabilité d'avoir deux boules qui portent le même numéro est :

$P_1 = \frac{A_2^2 + A_3^2}{A_5^2} = \frac{2\times1+3\times2}{5\times4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

2) Le produit des deux numéros portes par les deux boules tirées est nul si l'un deux au moins est nul, donc la probabilité pour avoir deux boules dont le produit de leurs numéros est nul est :

$P_2 = \frac{A_2^2}{A_5^2} + 2.\frac{A_2^1 + A_3^1}{A_5^2} = \frac{2}{5\times4} =$

$\frac{2\times2\times3}{5\times4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

Concours d'accès à la 1ère année de Médecine Dentaire

CASABLANCA 2009

Le nombre de question est 6 :

I- On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x$ et (Cf) sa courbe représentative.

1) Donner Df domaine de définition de f.

2) Donner l'équation de l'axe de symétrie de (Cf)

3) Répondre avec vraie ou faux pour les propositions suivantes :

a- f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

b- $f'(x)$ s'annule en $x = \pi$.

II- Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{2x}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}x + 2}{2x - 1}\right)$

III- On considère les complexes : $Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z_2 = 1 - i$ et $Z = \dfrac{Z_1}{Z_2}$

Déterminer : $|Z|$ et $\arg(Z)$.

IV- Calculer les deux intégrales suivantes : $\int_0^2 x e^{\frac{-x}{2}} dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx$

V- On considère la sphère (S) passant par le point $A(2, 1, 1)$ et de centre $\Omega(3, 0, 1)$:

1) Déterminer le rayon de la sphère (S).

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Déterminer l'intersection de (D) et (S).

VI- On a deux paniers S_1 et S_2 qui contient chacun des boules rouges et des boules noires.

S_1 contient 10 boules et S_2 contient 12 boules.

Le nombre total des boules noires est 10. On choisit au hasard un panier et on tire une boule.

Marquer la bonne réponse.

1) Si la probabilité d'obtenir une boule noire de S_1 est $\frac{1}{5}$; alors S_1 contient 2 boules noires.

☐ faux ☐ vraie

2) Si la probabilité d'obtenir une boule rouge de S_2 est $\frac{1}{3}$; alors S_2 contient 8 boules rouges.

☐ faux ☐ vraie

Corrigé du concours d'accès à la 1ère année de Medécine Dentaire

CASA BLANCA 2009

I- 1) On a : $f(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x$)

Donc f est composée des deux fonctions :

$x \to x^4 - 2x^2$ et $x \to \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donc : $Df =]-\infty, +\infty[$

2) f est paire Car : $f(-x) = \cos^4(-x) - 2\cos^2(-x)$

$= f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$)

(Car ; $\cos(-x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

3) On a pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

a- $f'(x) = 4\cos^3 x(-\sin x) - 4\cos x(-\sin x)$

$= -4\cos x \sin x(\cos^2 x - 1) = -2\sin 2x(-\sin^2 x)$

$= 2\sin 2x \sin^2 x$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin 2x \geq 0$

D'où : $f'(x) \geq 0$ et par la suite f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

D'où la proposition est juste.

b- On a : $f'(x) = 0 \iff \sin 2x \sin^2 x = 0$

$\iff \sin 2x = 0$ ou $\sin^2 x = 0$

$\iff 2x = 2\pi$ ou $2x = 0$ ou $x = 0$ ou $x = \pi$

$\iff x = \pi$ ou $x = 0$

D'où la proposition est juste.

II- * $= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{2x}} - \sqrt{\frac{x^2 - x}{2x}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{2x}} - \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} = -\infty$

** On a : $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}x + 2}{2x - 1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

III- On a : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$

et $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$

D'où : $|Z| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}$

$= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Et : $\operatorname{Arg} Z = \operatorname{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)^{+2k\pi} = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

IV- * Pour calculer l'intégrale : $\int_0^e x e^{\frac{-x}{2}}\,dx$

On utilise une intégration par parties :

$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -2e^{\frac{-x}{2}} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{\frac{-x}{2}} \end{cases}$

Donc :

$$\int_0^2 x e^{\frac{-x}{2}}\,dx = \left[-2e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 -2e^{\frac{-x}{2}}\,dx$$

$$= (-4e^{-1} + 0) + 2\left[-2e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{e} + 2(-2e^{-1} + 2e^0) = \frac{-8}{e} + 4$$

** Pour calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$$

On utilise une intégration par parties :

$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

V- 1) Le rayon du sphère (S) est :

$$r = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

2) L' intersection de : (D) et (S).

$M(a,b,c) \in (S) \cap (D) \iff \begin{cases} a = 3 + t \\ b = -2 - t \\ c = 1 + t \end{cases}$

et $(a-3)^2 + (b-0)^2 + (c-1)^2 = 2$

$\iff (a-3)^2 + (b-0)^2 + (c-1)^2 = 2$

$\iff (3 + t - 3)^2 + (-2 - t)^2 + (1 + t - 1)^2 = 2$

$\iff t^2 + 4 + 4t + t^2 + t^2 = 2$

$\iff 3t^2 + 4t + 2 = 0$

On a : $\Delta = (4)^2 - 4(3)(2)$

$= 16 - 24 < 0$

Donc : $(S) \cap (D) = \emptyset$

VI- 1) La probabilité d'obtenir une boule noire de S_1 est $\frac{1}{5}$ si le nombre de boules noires dans S_1 est 2.

Car le nombre de boules dans S_1 est 10. $\left(\frac{2}{10} = \frac{1}{5}\right)$

2) La probabilité d'obtenir une boule rouge de S_2 et $\frac{1}{3}$ si le nombre de boules rouges dans S_2 est 4. $\left(\text{Car} : \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\right)$.

Scanné avec CamScanner

Epreuve de Mathématique Médecine

2009 - 2010 (Durée : 30 min)

Question 1	La dérivée de la fonction : $f(x) = x^x, x > 0$ est :	(A) : $f'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}$ (B) : $f'(x) = e^{x\ln x}\,(x\ln 2)$ (C) : $f'(x) = x(x^{x-1})$ (D) : $f'(x) = (1-x)\, x^{x-1}$ (E) : $f'(x) = e^x + (1-x)e^{x-1}$
Question 2	La limite de : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ est :	(A) : 1 (B) : 0 (C) : n'existe pas (D) : $+\infty$ (E) : e
Question 3	L'ensemble des points M(Z) tel que : $\left\lvert\frac{iz+3}{z-4}\right\rvert = 1$ est :	(A) : Un cercle (B) : Une droite (C) : Une demi-droite (D) : Un demi-cercle (E) : Réunion de deux demi-droites
Question 4	$l = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2+1}$ est :	(A) : $l = 1$ (B) : l n'existe pas (C) : $l = 0$ (D) : $l = -1$ (E) : $l = +\infty$
Question 5	La solution générale de l'équation différentielle : $y'' = 2y'$ est :	(A) : $y(x) = ae^x + be^{2x}$ (B) : $y(x) = a + be^{2x}$ (C) : $y(x) = ae^x + b$ (D) : $y(x) = ae^x + be^{-2x}$ (E) : $y(x) = a + be^{-2x}$

Scanné avec CamScanner

Question 6	$L = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{3^k}\right)$ est :	(A) : $L = 0$ (B) : $L = \frac{1}{6}$ (C) : $L = 1$ (D) : $L = -1$ (E) : $L = +\infty$
Question 7	La valeur de l'intégrale : $I = \int_2^e \frac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{x}\, dx$ est :	(A) : $I = \frac{1}{12}\left(1 + (\ln 2)^3\right)$ (B) : $I = \frac{1}{12}\left(1 - (\ln 2)^3\right)$ (C) : $I = \left(1 + (\ln 2)^3\right)$ (D) : $I = \left(1 - (\ln 2)^3\right)$ (E) : $I = \frac{1}{12}\left(1 + (\ln 2)^2\right)$
Question 8	L'intersection de la sphère (S) de centre $I(1, 1, 0)$ et de rayon $R = 2$ avec le plan : $(P) : 2x + 2y - z = 0$ est :	(A) : Un point (B) : Un segment (C) : Un cercle (D) : Deux points (E) : L'ensemble vide.
Question9	Le concours d'accès à la Médecine pour l'année 2008-2009 est composé de 4 épreuves (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4) : La probabilité de chaque épreuve (Ei) est $\frac{1}{2^i}$. La probabilité de passer toutes les épreuves est :	(A) : $p = \frac{1}{2^{10}}$ (B) : $p = \frac{15}{2^4}$ (C) : $p = 1$ (D) : $p = 0$ (E) : $p = \frac{1}{2}$
Question 10	L'argument du complexe : $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2009}$ est :	(A) : $\beta = \pi$ (B) : $\beta = \frac{-5\pi}{6}$ (C) : $p = \frac{\pi}{6}$ (D) : $p = \frac{5\pi}{6}$ (E) : $p = -\pi$

Scanné avec CamScanner

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques de Médecine

2009 - 2010 (Durée: 30 min)

Question 1

La dérivée de la fonction

$f : x \mapsto x^x ; (x > 0)$

On sait que :$(\forall x > 0) ; x^x = e^{x\ln x})$

Donc : $f(x) = e^{x\ln x}$

D'où : $f'(x) = (x\ln(x))' e^{x\ln x)}$

$f'(x) = (1 + \ln(x))e^{x\ln x})$

Question 2

La limite de la fonction

$f : x \mapsto f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

en $+\infty$On sait que : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Donc : $f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^1 = e$$

$$\left(\text{car : } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1\right)$$

Question 3

L'ensemble des points M(Z) du plan complexe tel que : $\left|\frac{iZ+3}{Z-4}\right| = 1$

On a : $\forall Z \in C/\{4\}$

$$\left|\frac{iZ+3}{Z-4}\right| = 1 \iff \frac{|iZ+3|}{|Z-4|} = 1$$

$\iff |iZ + 3| = |Z - 4|$

$\iff |i(Z - 3i)| = |Z - 4|$

$\iff |i|\,|Z - 3i| = |Z - 4|$

$\iff |Z - 3i| = |Z - 4|$

$\iff AM = BM$

Tels que A(3i) et B(4)

D'où l'ensemble demandé est la droite c'est la médiane du segment [AB].

Question 4

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2 + 1}$$

On a : $\left|\frac{n(-1)^n}{2n^2+1}\right| = \frac{n}{2n^2+1}$

Donc : $-\frac{n}{2n^2+1} \le \frac{n(-1)^n}{2n^2+1} \le \frac{n}{2n^2+1}$

Puisque : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = 0$

$l = 0$

Question 5

La solution générale de l'équation différentielle : $y'' = 2y'$

On a : $y'' = 2y' \iff y'' - 2y' = 0$

Soit l'équation caractéristique :

$r^2 = 2r \iff r = 0$ ou $r = 2$

Donc la solution générale est : $y(x) = ae^{0x} + be^{2x}$

$= a + be^{2x}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Question 6

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{3^k}\right)$$

On sait que : $\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{3^k}\right)^n$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{3}}\right]$$

$$= \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)$$

Scanné avec CamScanner

Et puisque : $-1 < \frac{1}{3} < 1$

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$

et par suite : $L = \frac{1}{6}$

Question 7

La valeur de l'intégrale :

$$I = \int_2^e \frac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{x}\,dx$$

On a : $\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln(x)\right)^2$$

Donc : $I = \frac{1}{4}\int_2^e \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\left[\left(\ln(x)\right)^3\right]_2^e$$

$$= \frac{1}{12}\left[1 - \left(\ln(2)\right)^3\right]$$

Question 8

L'intersection de la sphère (S) de centre $I(1, 1, 0)$ est de rayon $R = 2$; avec le plan :

$(P) : 2x + 2y - z = 0$

Est un cercle car :

$d(I, (P)) = \frac{4}{3} < R = 2$

Question 9

La probabilité pour passer toutes les épreuves est :

$p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

$$= \frac{2^3 + 2^2 + 2 + 1}{2^4} = \frac{15}{24}$$

Question 10

L'argument du nombre complexe :

$Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2009}$ est :

On sait que : $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

Donc : $\left(\sqrt{3} - i\right)^{2009} = 2^{2009}.e^{\frac{-2009\pi}{6}i}$

$$= 2^{2009}.e^{\frac{-5\pi}{6}i}$$

D'où : $\arg\left(\left(\sqrt{3} - i\right)^{2009}\right) \equiv \frac{-5\pi}{6}\ [2\pi]$

Scanné avec CamScanner

Epreuve de Mathématique : Concours d'entrée 2009 (MARRAKECH)

Question 1

La partie imagine du complexe :

$z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})^2}$ est :

A) $\dfrac{-1}{12}$ B) $\sqrt{3}$ C) 0

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

Question 2

L'ensemble des solutions de l'équation :

$\dfrac{z+1}{z} = -1$ est :

A) $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\right\}$;

B) $\left\{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

C) $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\right\}$;

D) $\left\{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{3}\right\}$

E) $\varnothing$.

Question 3

Le domaine de définition de :

$g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 2}$ est :

A) $[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$

B) R^*

C) $]1+\sqrt{3} +\infty]$

D) $\mathbb{R} - \{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$

E) $\mathbb{R}$ $]1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}[$

Question 4

La valeur de la limite :

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ est : $\dfrac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+1}}{x}$

A) $+\infty$ B) n'existe pas C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ E) 0.

Question 5

$(Un)_n$ est une suite numérique définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{n+2}{n(n+1)}$

La raison de la suite $(Vn)_n$: $V_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ est :

A) $\dfrac{-1}{2}$ B) 2 C) 0

D) -2 E) $\dfrac{1}{2}$

Question 6

Soit h la fonction définie par :

$h(x) = \dfrac{\text{Sin}(\pi x)}{x-1}$

pour $x \neq 1$ et $h(1) = a$; $(a \in \mathbb{R})$.

La valeur de a pour que h soit continue en $x = 1$ est :

A) $-\pi$ B) π C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\pi}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Question 7

Soit g une fonction numérique définie et dérivable sur I : $I =]0, +\infty[$; tel que :

$g(x) = xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $g(1) = 1$.

La valeur de $g'(1)$ est :

A) -2 B) 0 C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{-1}{2}$

Question 8

La valeur de l'intégrale : $\int_0^2 \frac{|1-x|}{|1-x^2|+|1+x^2|}dx$

est :

A) $\frac{-1}{6}$ B) 0 C) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

D) $\frac{\ln(2)}{2}$ E) $2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Question 9

La courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

A) $y = x$

B) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$

C) $y = \sqrt{2}\,x + 1$

D) $y = 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Question 10

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, (l'unité c'est le cm), on considère les deux courbes représentative de f et g définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.

La surface du domaine du plan délimité par les courbes de f et g et les deux droites :

$x = 0$ et $x = 2$ est :

A) $\frac{2+5\sqrt{2}}{-2}$ cm² ; B) $\frac{1}{2}$ cm² ;

C) $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{3}$ cm² ; D) $\frac{2(2-5\sqrt{2})}{3}$ cm²

Question 11

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

Le point Ω (1,2) est un centre de symétrie pour (C) si ($\forall x \in \mathbb{R}$) on a :

A) $h(x) = 2x$; B) $h(2-x) + h(x) = 4$;

C) $h(2-x) = h(x)$; D) $h(1-x) = 2 - h(x)$

E) $h(-x) = -h(x)$.

Question 12

On jette deux dés (de couleur différentes) au même temps (l'un deux est cubique et l'autre est truqué et ces faces sont numérotées de 1 à 6)

La probabilité d'obtenir deux faces dont la somme des numéros est égale à 8 est :

A) $\frac{5}{36}$; B) $\frac{1}{12}$; C) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;

D) $\frac{1}{36}$; E) $\frac{8}{36} = \frac{1}{9}$.

Corrigé d'épreuve de Mathématiques Concours d'entrée 2009 (MARRAKECH)

Question 1

On a : $z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})^2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-2-2i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-2\left(1+i\sqrt{3}\right)} = -\dfrac{1}{2}$

Donc la partie imaginaire de z est 0 ; d'où la réponse juste c'est (C).

Question 2

$z+\dfrac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2+1 = -z \Leftrightarrow z^2+z+1=0$

$(z \neq 0)$

On a : $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

D'où les solutions sont :

$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

Question 3

On a : $x \in Dg \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \geq 0$

$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$	
+	-		+

$\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right] \cup \left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$

Question 4

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{2}$

Donc la réponse juste c'est (C).

Question 5

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$ et $n \geq 1$

$V_{n+1} = U_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} = 2U_n + \dfrac{n+2}{n(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}$

$= 2U_n + \dfrac{n+2}{n(n+1)} + \dfrac{n}{n(n+1)}$

Donc : $V_{n+1} = 2V_n$

Et : $V_{n+1} = 2U_n + \dfrac{2n+2}{n(n+1)} = 2\left(U_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Par suite la raison de la suite $(Vn)_n$ est 2.

D'où la réponse juste c'est (B).

Question 6

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = ?$ on pose : $x = X+1$ et $X = x-1$

D'où : $X \to 0 \Leftrightarrow x \to 1$

Donc : $\sin(\pi(X+1)) = \sin(\pi X + \pi) = -\sin(\pi X)$.

Par la suite : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{-\sin(\pi x)}{X}$

$= \lim\limits_{x\to 0} -\pi \dfrac{+\sin(\pi x)}{\pi X} = -\pi$

D'où la valeur de a est π.

Donc la réponse juste c'est (D).

Question 7

g est dérivable sur I, et on a : $g(x) = xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Donc : $g'(x) = \left(xg\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)' = g\left(\dfrac{1}{x}\right) - x.\dfrac{1}{x^2}g'\left(\dfrac{1}{x}\right)$

D'où : $g'(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}g'\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Donc pour $x = 1$; on a : $g'(1) = g(1) - g'(1)$

C'est-à-dire ; $2g'(1) = g(1) = 1$

Par la suite : $g'(1) = \dfrac{1}{2}$

Donc la réponse juste c'est (C).

Scanné avec CamScanner

Question 8

$$I = \int_0^2 \frac{|1-x|}{|1-x^2|+|1+x^2|}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^2+1+x^2}\,dx + \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-1+1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(x) + \frac{1}{x}\right]_1^2$$

Donc : $I = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2} - 1\right)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ln\sqrt{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

D'où la réponse juste c'est (D).

Question 9

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} = 1$

Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où la droite d'équation $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote oblique à (C).

D'où la réponse juste c'est (E).

Question 10

On a : $f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x^2$

$$= -\left(\sqrt{x}\right)^4$$

$$= \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}^3\right)$$

$$= \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x} + \sqrt{x}^2\right)$$

$f(x) - g(x) = 0 \iff 1 - \sqrt{x} = 0 \iff x = 1.$

Et on a : $1 + \sqrt{x} + \sqrt{x}^2 > 0$

(car : $1 + \sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 0$) n'a pas de solution.

Donc la surface demandée est :

$$A = \left(\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx + \int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right)dx\right)\text{cm}^2$$

$$A = \left(\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\right)\text{cm}^2$$

$$A = \left(\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\text{cm}^2 = \frac{2\left(5 - 2\sqrt{2}\right)}{3}\text{cm}^2$$

D'où la réponse juste c'est (C).

Question 11

Le point Ω (1,2) est un centre de symétrie pour (C) sur $\mathbb{R}$ SSi $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(2-x) \in \mathbb{R}$

et $h(2-x) + h(x) = 4$

D'où la réponse juste c'est (B).

Question 12

Soit Ω l'univers de possibilités,

card $\Omega = 6 \times 6 = 36$.

Donc il y a 36 cases dans le tableau ci-dessous :

$d_1 \backslash d_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

D'où la probabilité demandé c'est A .

Matière

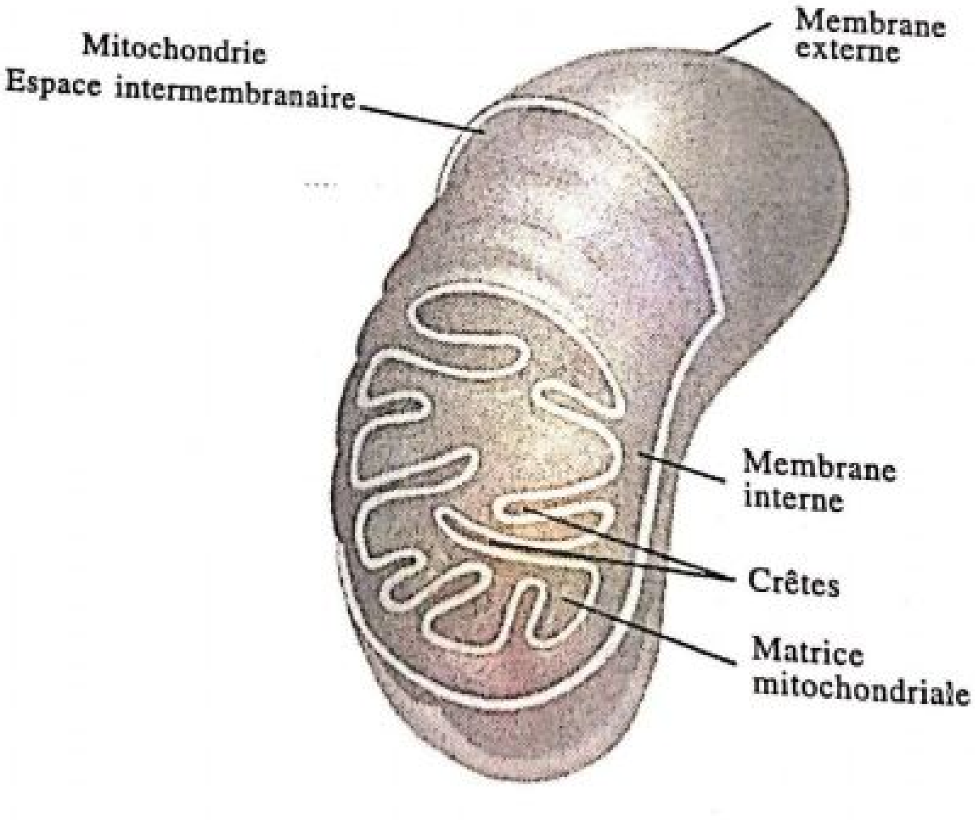
Sciences de la vie et de la terre

Scanné avec CamScanner

SVT

Unité n° 1

CONSOMMATION DE LA MATIÈRE ORGANIQUE ET FLUX D'ENERGIE



Scanné avec CamScanner

L'essentiel du cours

Chapitre 1 — Libération d'energie emmagasignée dans la matière organique au niveau cellulaire.

1 - La réspiration et la fermentation : deux voies métaboliques pour la libératiion d'energie.

La levure de bierre est un champignon microscopique unicellulaire qui utilise le glucose comme métabolite énèrgetique. selon les conditions , elle est capable de le dégrader de deux façons différentes

. Si le milieu est aérobie (présence d'oxygène) , le glucose est totalement dégradé en CO_2, H_2O : les levures réspirent *

. Si le milieu est anaerobie (absence ou manque d' O_2) le glucose est partiellement dégradé en éthanol + CO_2 *

Respiration : $C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O + E$

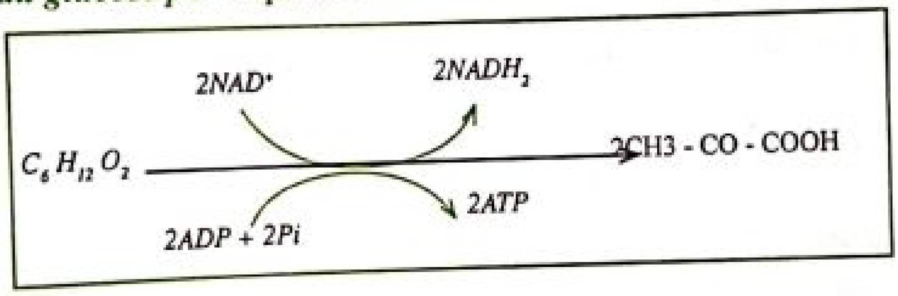
Fermentation : $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow 2\,C_2H_5OH + 2\,CO_2 + E$

2 - La mitochondrie est un organite cellulaire nécessaire à la réspiraton.

3 - Etapes de dégradation du glucose par réspiration cellulaire.

A - Glycolyse

Elle a lieu dans l'hyaloplasme; il s'agit d'une série de réactions catalysées par des enzymes spécifiques qui produisent des métabolites intermédiaires entre : le glucose et l'acide pyruvique



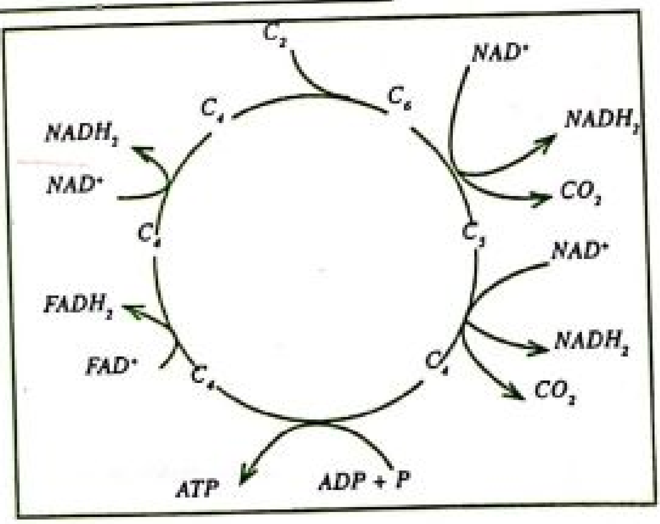
B - La formation de l'acethyl Co enzyme A.

Se déroule dans la matrice de la mitochondrie

$$CH_3 - CO - COOH + COA - H + NAD^+ \rightarrow CH_3 - CO - COA + NADH_2 + CO_2$$

C - Cycle de Krebs :

L'acethyl Co enzyme A, molecule à deux carbones entre dans une serie de réactions, d'oxydo - réductions, de dècarboxylation et de déshydrogènation, dans la matrice



Scanné avec CamScanner

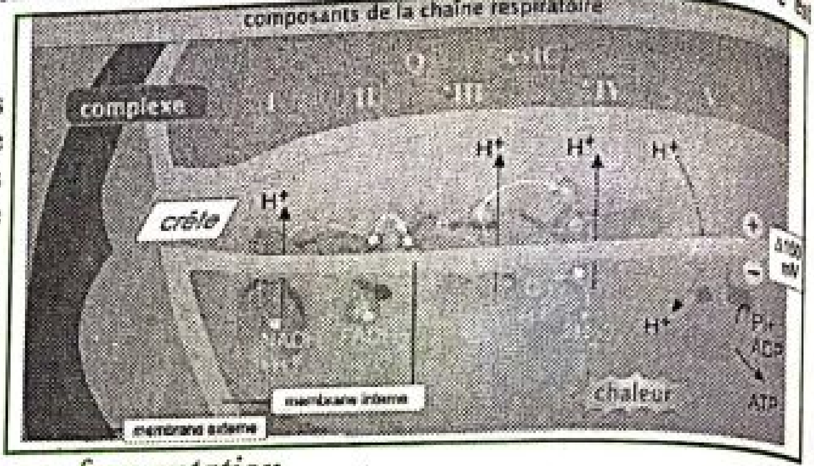
D - La phosphorylation oxydative :

.Est une étape qui a lieu au niveau de la membrane intèrne de la mitochondrie

Les transporteurs réduits (TH - H$^+$) sont oxydés par l'O_2 qui, en accéptant des protons (H$^+$) permet la formation de l'eau. Le potentiel redox du couple T$^+$/TH-H$^+$ étant de - 0,32V et celui de O_2/H_2O est de - 0,8V, le transport d' é est . spontané de TH-H à O_2

Ce transfert d' éléctrons est réalisé par l' intervention de transporteurs d' e$^-$ enchassés dans la membrane interne de la mitochondrie et y sont ordonnés dans le sens des potentiels . redox croissants : C'est la chaine respiratoire

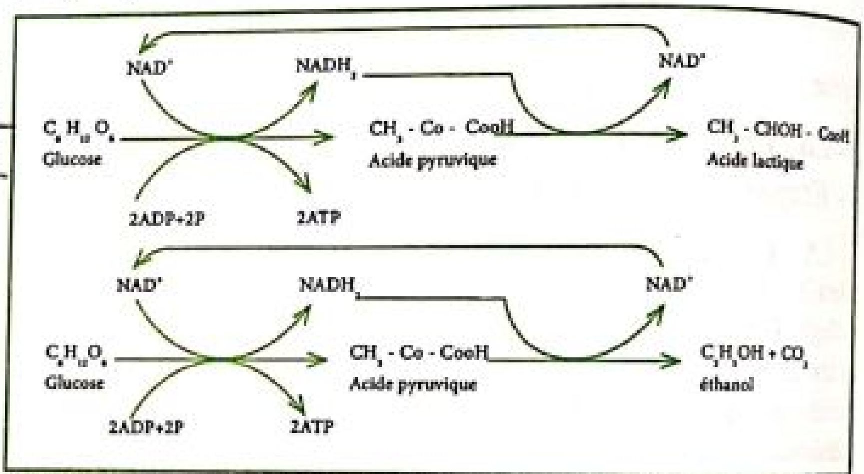
Les protons H$^+$ sont stockés dans l'espace intermediaire ce qui permet un flux de protons par les sphères pedonculées permettant la : phosphorylation de l' ADP en ATP



4 - *Etapes de dégradation du glucose par fermentation*

La férmentation est une dégradation partielle du glucose en milieu anaerobie ; Elle peut être lactique dans le cas d'une activité musculaire intense où il ya .manque d' oxygène

Dans le cas des levures de bière, la .fermentation est alcoolique



5 - *Le bilan énergetique .*

Sachant que l'oxydation d' 1 NADH2 libère 3ATP et celle de 1 FADH2 libère 2ATP; le bilan de la dégradation : d'une molécule de glucose est le suivant

1ère étape : 2 ATP + 2$NADH_2$ = 8 ATP

2ème étape : 1 $NADH_2$ x 2 = 2$NADH_2$ = 6 ATP

3ème étape : 3 $NADH_2$ x 2 = 6 $NADH_2$ = 18 ATP

1 $FADH_2$ x 2 = 2 $FADH_2$ = 4 ATP

1 ATP x 2 = 2 ATP = 2 ATP

} 38 ATP

Pour la fermentation le bilan est de 2ATP.

6 - *Le rendement énergetique :*

Sachant qu'une molécule de glucose emmagasine 2840 kj et qu'une molécule d' ATP libère 30,5 kj, le rendement : de la respiration et la férmentation est le suivant

Respiration

2840 kj ⟶ *100%*

38 ATP = 1159 kj ⟶ *x*

$$x = \frac{1159}{2840} \cdot 100 = 40{,}8\ \%$$

fermentation

2840 kj ⟶ *100%*

2 ATP = 61 kj ⟶ *x*

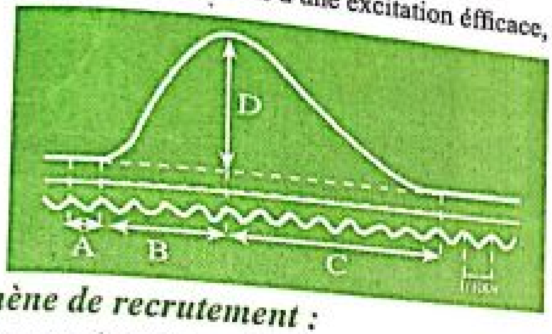
$$x = \frac{61}{2840} \cdot 100 = 2{,}1\ \%$$

Le rendement de la fermentation est très faible parce qu'elle produit des molecules (Ethanol, ou l' acide lactique) qui sont des molécules organiques contenant encore de l'énergie. C'est pour cela que la férmentation est une perte . d'énergie

Chapitre 2 Rôle du muscle squelettique dans la transformation d'energie.

1 - La secousse musculaire :

Elle représente la réponse du muscle à une excitation éfficace, ses phases sont les suivants



A : temps de latence

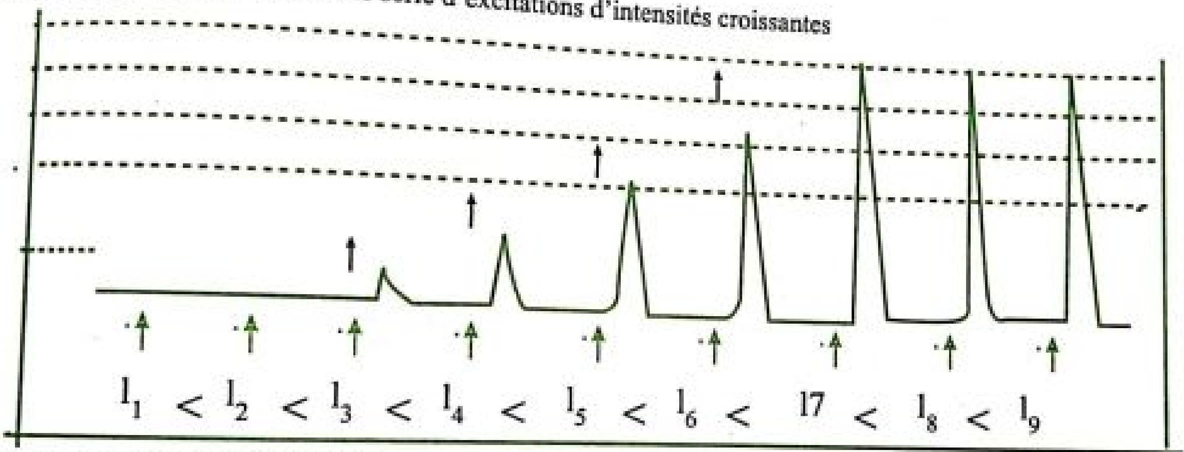
B : phase de contraction

C : phase de relachement

D : Amplitude de la secousse

2 - phenomène de recrutement :

On applique à un muscle strié une série d'excitations d'intensités croissantes



I_1 et I_2 : Excitations inéfficaces

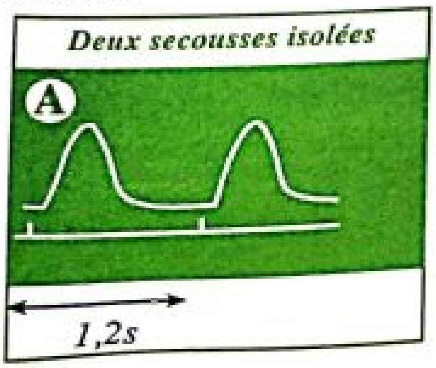
Seuil d'excitation ou rhéobase = la plus petite excitation éfficace : I_3

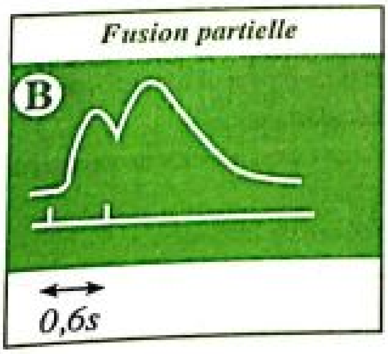
$I_3 \longrightarrow I_7$: plus l'intesité d'excitation augmente plus l'ampitude de la secousse musculaire augmente = phénomène de recrutement

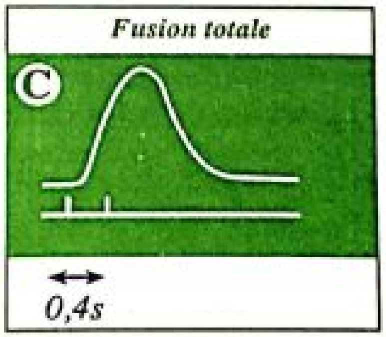
$I_7 \longrightarrow I_9$: L'amplitude des secousses reste inchangée malgré l'augmentation de l'intesité des éxcitations

3 - Fusion et tetanos musculaires :

On applique deux excitations successives, les deux secousses sont soit isolées, ou fusionnées totalement ou partielement .

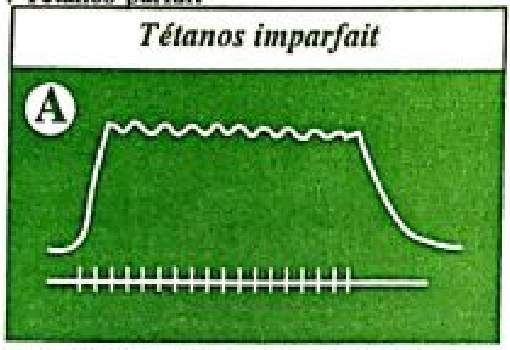


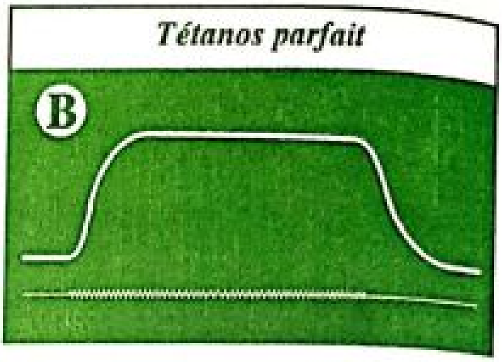




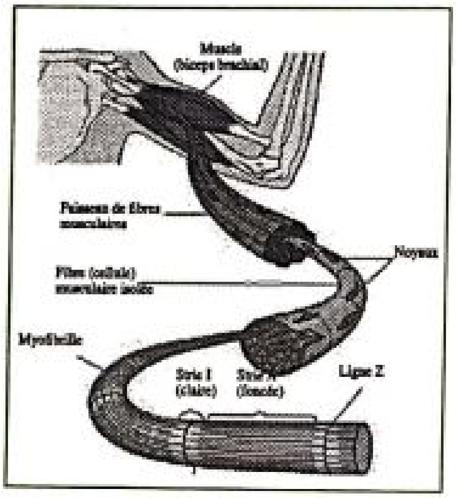
Scanné avec CamScanner

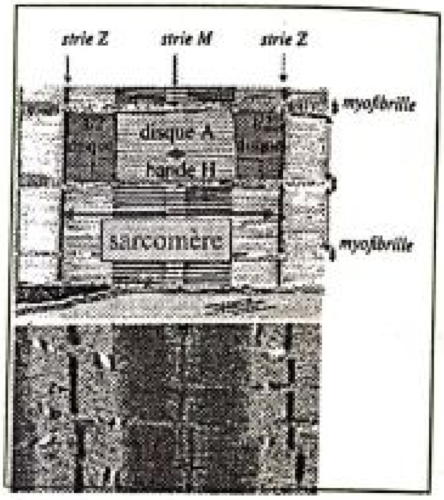
Si on applique une série d'excitations éfficaces , les secousses fusionnent partiellement: Tétanos imparfait, ou totalement : Tétanos parfait





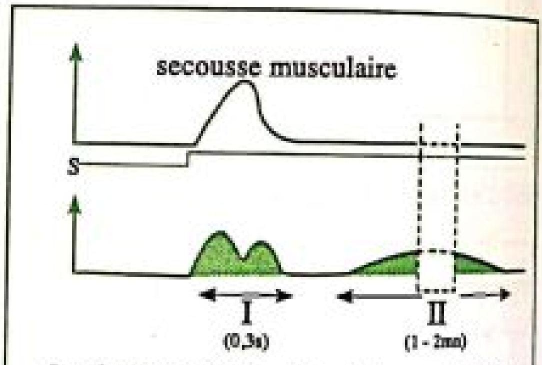
4 - Structure et ultrastructure du muscle :





5 - Chaleur initiale et chaleur retardée :

: La contraction musculaire est accompagnée de deux chaleurs
chaleur initiale libèrée pendant la contraction musculaire, elle -
.est d'origine anaerobie
.la chaleur retardée, aerobie, est liberée après la contraction -



I : chaleur initiale II : chaleur retardée

6 - Le renouvellement d'ATP :

L' ATP consommée par le muscle est régénèrée par

- Réspiration :

$C_6H_{12}O_6 + 6\,CO_2 \longrightarrow 6O_2 + 6\,H_2O + 38$ ATP .

- Férmentation : $C_6\,H_{12}O_6 \longrightarrow 2\,CH_3$ - CHOH - COOH + 2 ATP
- Phosphocreatine : PC + ADP $\longrightarrow$ C + ATP

Les étapes de la contraction musculaire :

Après l'arrivée d' un influx nerveux au muscle il se contracte suivant les étapes suivantes :

- Libération du Ca^{++} par le reticulum endoplasmique .
- Deplacement de la Tropomyosine , libérant ainsi les sites de fixation des têtes de myosine.
- Formation du complexe actino - myosine .
- Rotation des têtes de myosine vers le centre du sarcomère après hydrolyse de l' ATP .
- Glissement des myofilaments d'actines entre les myofilaments de myosine .
- Contraction du muscle.

SVT

Questions d'évaluation des connaissances

I - Définir les notions suivantes :

1 - La glycolyse
2 - Respiration cellulaire
3 - Le cycle de Krebs.
4 - La chaine respiratoire
5- La fermentation cellulaire lactique
6 - La phosphorylation oxydative
7 - Le sarcomère.

II - Comparer sous forme d'un tableau entre la repiration et la fermentation lactique :

III - Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes :

1 - Les étapes de la glycolyse ont lien dans la mitochondrie.
2 - La fermentation ne nécessite pas d'oxygène.
3 - La réaction faisant intervenir l'acétyle co - enzyme A a lieu dans la mitochondrie.
4 - L'oxydation de $NADH_2$ et $FADH_2$ à lien dans l'hyaloplasme.
5 - A partir d'une molécule de glucose, la cellule produit au cours de la respiration 28ATP.
6 - Le gradient d' H^+ apparait lors du transfert d' e^- dans la chaine respiratoire.
7 - Pendant la contraction, il y a rétrécissement des myofilaments d'actine et de myosine.
8 - L'oxydation de $1NADH_2$ libère 2ATP au niveau de la chaine respiratoire.
9 - Chez les athlètes spécialistes des longues distances, les cellules musculaires sont riches en mitochondries.
10 - Pendant la contraction musculaire, le Ca^{++} libère le site de fixation de myosine sur l'actine.
11 - La contraction musculaire nécessite Ca^{++}, ATP et le glucose.
12 - Le cycle de Krebs produit $2CO_2$, $6NADH_2$ et $2FADH_2$.
13 - L'accumulation de l'acide lactique favorise la contraction musculaire.
14 - Le rendement de la respiration est plus grand que celui de la fermentation.
15 - La sarcomère est une unité fonctionnelle de la fibre musculaire et il n'est formé que d'actine.
16 - La longueur des deux myofilaments d'actine et de myosine ne change pas au cours de la contraction musculaire.
17- Pendant l'oxydation respiratoire, les protons passent de la matrice vers l'hyaloplasme.
18 - La fermentation lactique produit 2ATP et $2NADH_2$.
19 - La respiration est un ensemble de réaction qui ont lien au niveau de la membrane interne de la mitochondrie.
20 - La fermentation est un ensemble de réactions aérobies.
21 - La glycolyse a lieu dans l'hyaloplasme en absence d'oxygène.

SVT

Scanné avec CamScanner

22 -La contraction musculaire a lieu après la phosphorylation de l'ADP.
23 -Le muscle ne régénère son énergie que par respiration.
24 -La séparation de l'actine et myosine se fait après retour du Ca^{++} au réticulum endoplasmique.

IV- Q.C.M. Entourer la lettre de la réponse juste :

1 -L'acide pyruvique produit dans un milieu aérobie :

a -acide citrique
b -Acétyle COA
c -Acide oxaloacétique
d -Acide lactique.

2 -Pendant leur transfert dans la chaine respiratoire les électrons :

a -Perdant l'énergie
b -Gagnent de l'énergie
c -Se lient avec H^+ et O_2 pour fermer l'H_2O
d -Passent à l'espace intermembranaire.

3 -Pendant la production de l'énergie (ATP) dans la mitochondrie :

a -L'acide pyruvique se forme.
b -Il y a formation des électrons et des protons.
c -Le CO_2 est libéré pendant le cycle de Krebs.
d -Les e^- et H^+ formés restent dans la matrice.

4 -A propos de la chaine respiratoire de la membrane interne de la mitochondrie.

a -Les H^+ sont transférés vers O_2.
b -Se crée un gradient de H^+ emmagasinant de l'énergie.
c -Il y a stockage d' H^+ dans l'espace intermembranaire.
d -Les H^+ quittent la matrice à travers les sphères pédonculées.

5 -Pendant la fermentation alcoolique, une molécule de glucose donne :

a 2 CH_3 COOH
b :2CH_3 CH_2 OH
c 2CH_3 - OH
d :2CH_3 - CHOH-COOH

6 -La réaction de l'acétyle COA dans le cycle de Krebs a lieu dans :

a -Membrane interne de la mitochondrie.
b -L'espace intermembranaire.
c -La matrice.
d -Membrane interne de la mitochondrie.

7 -La réoxydation des $NADH_2$ produits lors de la glycolyse a lieu dans :

a -Membrane interne mitochondriale.
b -Hyaloplasme.
c -La matrice mitochondriale.
d -Membrane externe de la mitochondrie.

8 -Le bilan énergétique de la glycolyse dans la cellule est :

a -38ATP
b -36ATP
c -2ATP
d 0ATP.

9 -Le bilan de dégradation aérobie d'1 glucose est :

SVT

Scanné avec CamScanner

a 2ATP *b* 4ATP *c* 6ATP *d* 38ATP

10 Le rôle du réticulum endoplasmique dans la fibre musculaire est :

a Production d' ATP nécessaire à la contraction musculaire.

b Inhibition du relâchement des myofilaments.

c Libération du Ca^{++} pour faciliter la liaison actine et myosine.

d Hydrolyse de l'ATP.

11 Les myofilaments fins de la fibre musculaire sont formés de :

a Actine

b Troponine et myosine

c Myosine

d Actine, troponine et tropomyosine.

12 La contraction musculaire se fait par :

a Diminution des filaments d'actine et myosine.

b Glissements des myofilaments d'actine entre les myosines.

c Rétrécissement de la bande sombre.

d Allongement de la bande claire.

13 La phosphorylation oxydative est :

a Une phosphorylation de l'ADP pendant le cycle de Krebs.

b Une production d'ATP pendant la glycolyse.

c Une production d'ATP pendant la fermentation.

d Une phosphorylation d'ADP et oxydation des transporteurs d' e^-.

14 -Le glucose est :

a Un constituant essentiel de la membrane cytoplasmique.

b Une énergie prête à l'utilisation dans le cytoplasme.

c Une source d'énergie de la cellule vivante.

d Une molécule se trouvant dans le noyau.

15 L'énergie retardée :

a Est libérée après la contraction musculaire.

b Est libérée pendant la contraction musculaire.

c Résulte de l'hydrolyse de l'A T P.

d Résulte de la fermentation lactique.

16 Les myofilaments d'actine sont de nature :

a Glucidique.

b Lipidique.

c Protéinique.

d Glycolipidique.

17 La myosine se lie à :

a Réticulum endoplasmique pour libérer Ca^{++}.

b L'actine pour former le complexe acto-myosine.

c Glucose pour former l'A T P.

SVT

Scanné avec CamScanner

d - Tropomyosine pour libérer l'A T P.

18 - La mitochondrie est un :

a - Organite cellulaire nécessaire à la fermentation.

b - Organite cellulaire dans lequel l'acide pyruvique est oxydée.

c - Membrane où à lien la respiration.

d - Organite cellulaire où a lieu la glycolyse.

19 - La respiration cellulaire :

a - Libère l'énergie emmagasinée dans le glucose.

b - Produit l'A D P par phosphorylation d'A T P.

c - A lieu dans la mitochondrie seulement.

d - Libère une petite quantité d'énergie.

20 - Pendant la libération d'A T P dans la mitochondrie :

a - Les e^- et H^+ sont formés.

b - CO_2 est libéré pendant le cycle de Krebs.

c - Il y a oxydation de l'acide pyruvique.

d - Les H^+ libérés restent dans la matrice.

21 - Pendant les réactions de la chaine respiratoire :

a - Il y a phosphorylation d'A T P.

b - Il y a phosphorylation d'A D P.

c - Les transporteurs d'e^- et H^+ sont réduits.

d - La molécule d'H_2O est consommée.

22 - Le tétanos est une réponse du muscle suite à l'application de :

a - Une stimulation.

b - Deux stimulations successives.

c - Une série de stimulations.

d - Pas de stimulation.

SVT

Scanné avec CamScanner

Réponses

I- Définitions :

1- La glycolyse est une série de réactions chimiques catalysées par des enzymes spécifiques qui ont lien dans l'hyaloplasme et qui consistent à former deux acides pyruviques à partir d'une molécule de glucose.

2 - La respiration cellulaire est une dégradation totale de glucose dans un milieu aérobie pour libérer une grande quantité d'énergie et des résidus de nature minérale.

3 - Le cycle de Krebs est une série de réactions chimiques catalysées par des enzymes spécifiques pendant lesquelles l'acétyle CO- A est déshydrogéné et decarboxylé avec réduction des transporteurs d' e^- et de H^+.

4 - La chaine respiratoire est un ensemble de protéines intégrées dans la membrane interne mitochondriale capable d'oxyder les transporteurs d' e^- et d' H^+ et de transférer spontanément les e^- jusqu'à leur accepteur final qui est le dioxygène.

5 - La fermentation lactique est une dégradation incomplète du glucose dans un milieu anaérobie produisant peu d'énergie et un résidu organique qui est l'acide lactique.

6 - La phosphorylation oxydative est un processus permettant la phosphorylation de l' A D P en ATP grâce à l'énergie libérée par l'oxydation de donneurs d'électrons par la chaine respiratoire.

7 - La sarcomère est une unité structurale et fonctionnelle de la fibre musculaire limitée entre deux stries Z successives et comprenant deux demi - bandes claires et une bande sombre.

II- Comparaison de la répiration et la fermentation :

	Respiration	Fermentation
Niveau cellulaire	Hyaloplasme et mitochondrie	Hyaloplasme
Condition du milieu	Aérobie	Anaérobie
Substances consommées	Glucose + O_2	Glucose
Dégradation du glucose	Totale	Partielle
Nombre d' A T P produits	38ATP	2ATP
Produits	$H_2O + CO_2 + ATP$	Acide lactique + ATP
Réaction globale	$C_6H1_2O_6 + 6CO_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O + E$	$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2CH_3\text{–}CHOH - COOH + E$

III - Réponses par vrai ou faux :

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponses	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F

Questions	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Réponses	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V

IV - Q. C. M :

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Réponses	b	a	c	b	b	c	a	c	d	c	d	b	d

Questions	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Réponses	c	a	c	b	b	a	c	b	c

SVT

Scanné avec CamScanner

L'essentiel du cours

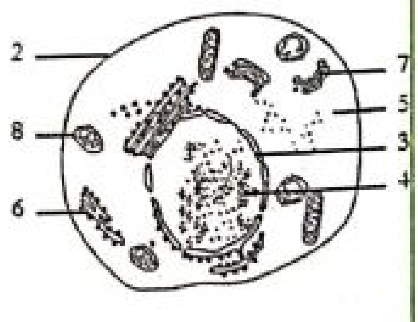
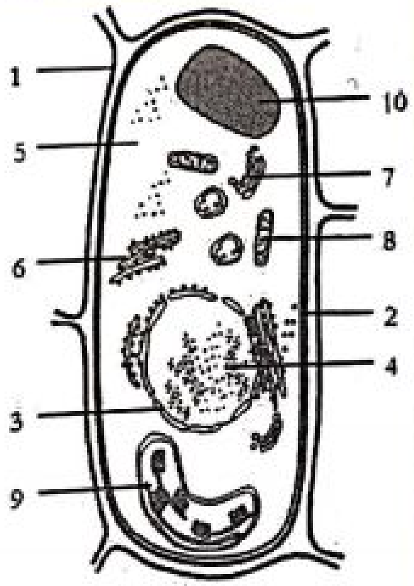
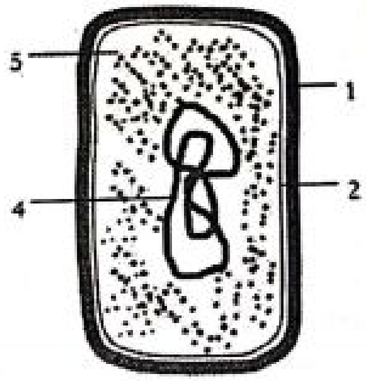
Chapitre 1 La notion de l'information génétique

1 - Définition :

.l'information génétique est un programme héréditaire qui détérmine les caractères héréditaires de l'individu

2 - La localisation de l'information génétique :

L'information génétique se situe dans le noyau des cellules eucaryotes, et directement dispérsée dans le cytoplasme (...... chez les procarotes (Ex : Bactéries

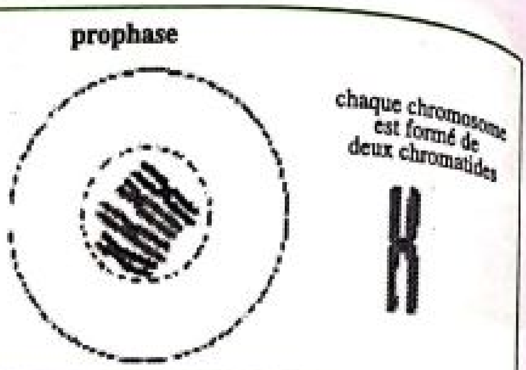
CELLULE EUCARYOTE		CELLULE PROCARYOTE
Cellule animale	Cellule végétale	Bactérie
		

3 - La transmission de l'information génétique :

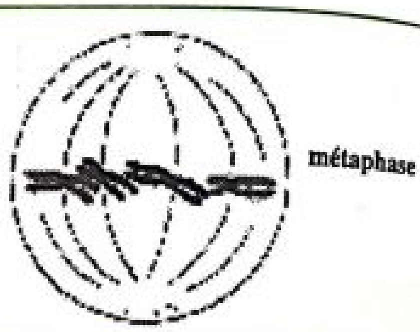
.L'information génétique se transmet d'une cellule à l'autre par la division

a - Les étapes de la mitose.

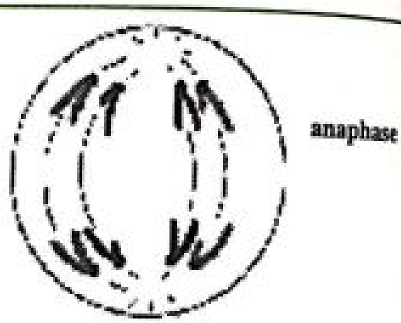
1. La phase (15 à 60 minutes).
- Condensation de la chromatine qui forme des chromosomes clivés longitudinalement en deux chromatides réunies par un centromère.
- Disposition de l'enveloppe du noyau.
- Apparition d'un fuseau de fibres entre deux pôles de la cellule.



2. La métaphase (quelques minutes seulement).
- Regroupement des centromères dans le plan équatorial du fuseau de division (l'ensemble des chromosomes clivés, ainsi rangés, forme une figure appelée plaque équatoriale).

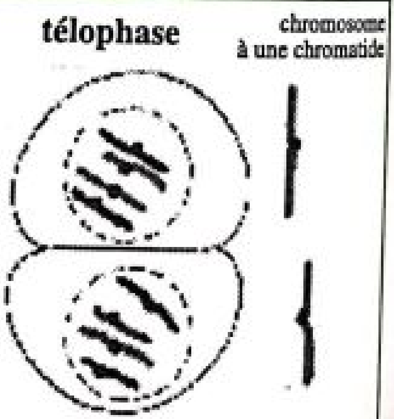


3. L'anaphase (2 à 3 minutes).
- Les deux chromatides de chaque chromosome métaphasique s'écartent l'une de l'autre après coupure de chaque centromère.
- Migration en sens opposé de deux lots identiques de chromosomes à une chromatide (chaque chromosome de la cellule initiale est donc représenté par une chromatide dans chacun des deux lots ainsi constitués).



4. La télophase (15 à 60 minutes).
- Formation d'un noyau au niveau de chaque pôle par désindividualisation des chromatides qui retournent à l'état de chromatine diffuse et reconstitution d'une enveleoppe nucléaire.
- Disparition du fuseau de division et division du cytoplasme entre les deux noyaux-fils.

Les deux cellules filles entrent alors en interphase.



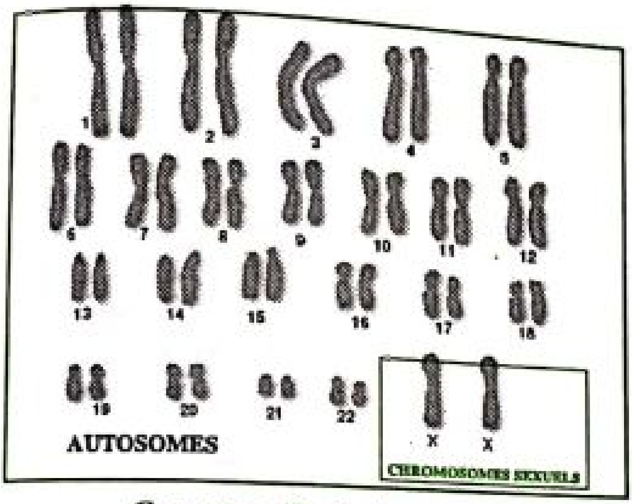
Bien que la mitose soit un phénomène continu, le comportement des chromosomes permet de distinguer quatre phases.

- La mitose est précédée par une interphase caractérisée par la duplication des chromosomes.
- La mitose et l'interphase constituent : Le cycle cellulaire.

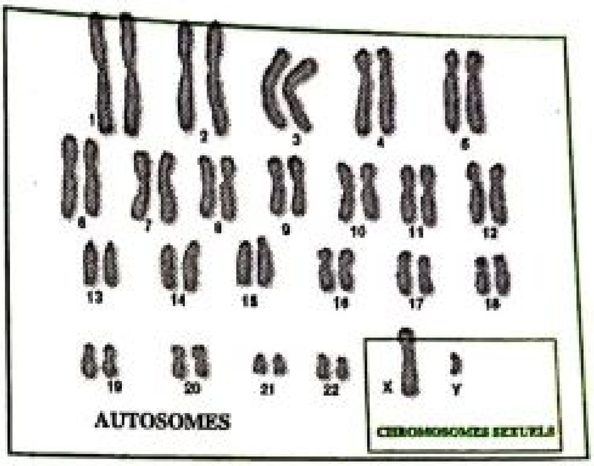
Scanné avec CamScanner

b - Le caryotype :

C'est l'ensemble des chromosomes de la cellule classés par taille, emplacement du centromère, alternace des bandes .... etc.



Caryotype féminin normal



Caryotype masculin normal

Le changement du nombre ou de l'aspect des chromosomes peut causer des anomalies physiques et mentales ; donc changement des caractères héréditaires. On en déduit : <u>Les chromosomes sont le support cellulaire de l'information génétique</u>.

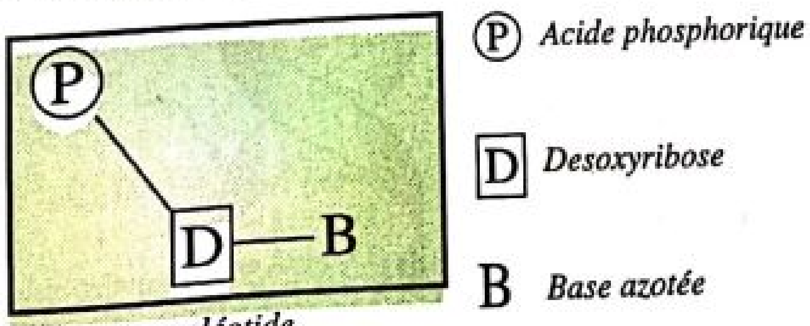
4 - La nature chimique de l'information génétique.

L'information génétique est située dans le noyau, et se transmet par mitose grace aux chromosomes formés essentiellement d'ADN : Acide désoxyribonucléïque. On en déduit: <u>L'ADN est le support chimique de l'information génétique</u>.

a - La structure de l'ADN :

* L'hydrolyse enzymatique de l'ADN a permis de le décomposer en :
  - Acide phosphorique : H_3PO_4 ou (P)
  - Sucre pentose ; Desoxyribose : $C_5H_{10}O_4$.
  - Bases azotées, au nombre de quatre :
    - Adenine : A
    - Cytosine : C
    - Guanine : G
    - Thymine : T

La combinaison d'un acide phosphorique avec un sucre et une base azotée forme un Nucléotide :



un nucléotide

Scanné avec CamScanner

→ Le nuclotide est l'unité essentielle de l' ADN.

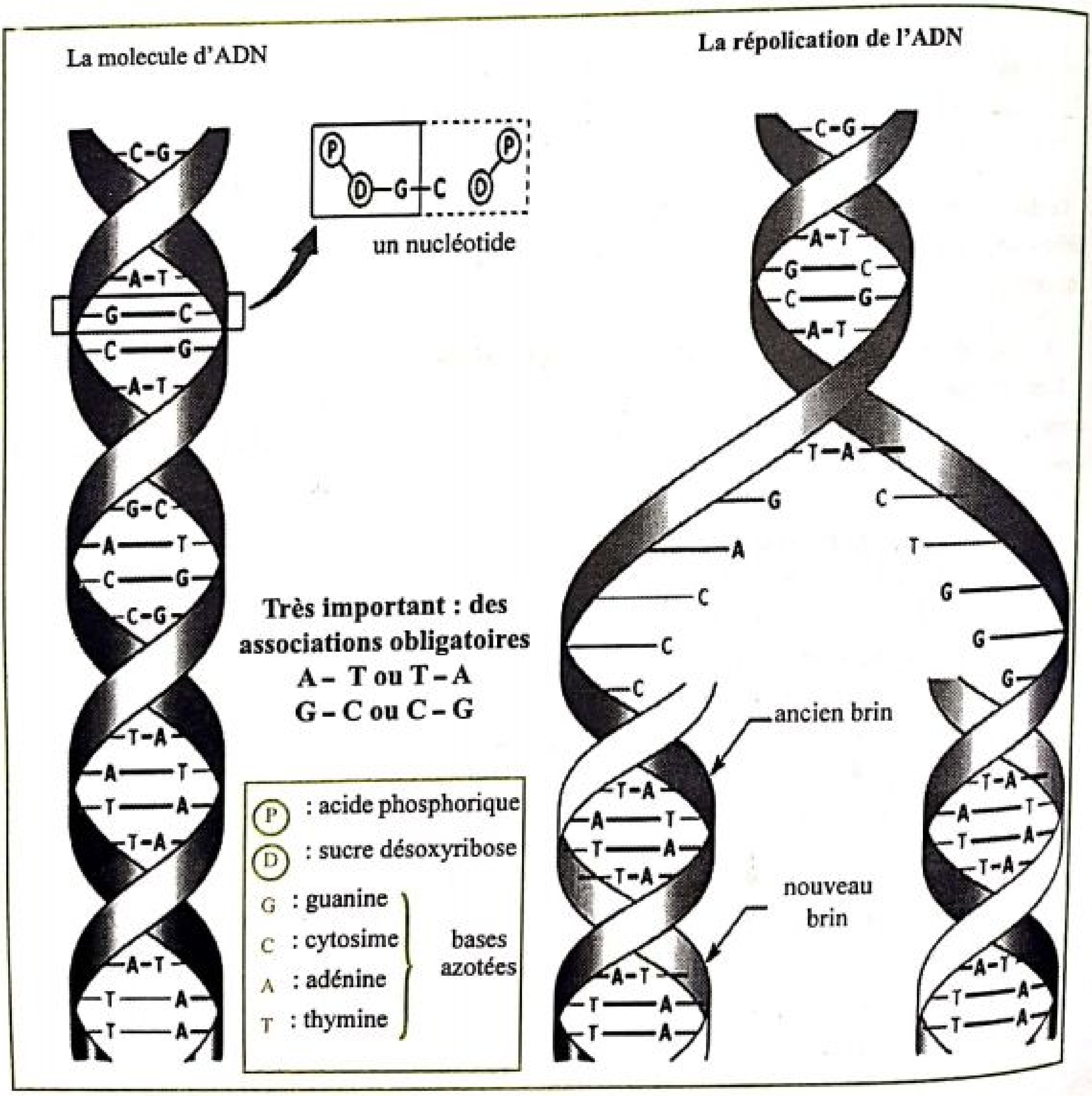
→ Il ya 4 nucléotides différents, selon leurs bases azotées.

→ L'ADN est un polymère de nucléotides.

* Le modèle d'ADN de Watson et Crick.

La molecule d'ADN est formée de deux chaines de nucléotides enroulées en spirale l'une autour de l'autre : la double hélice.

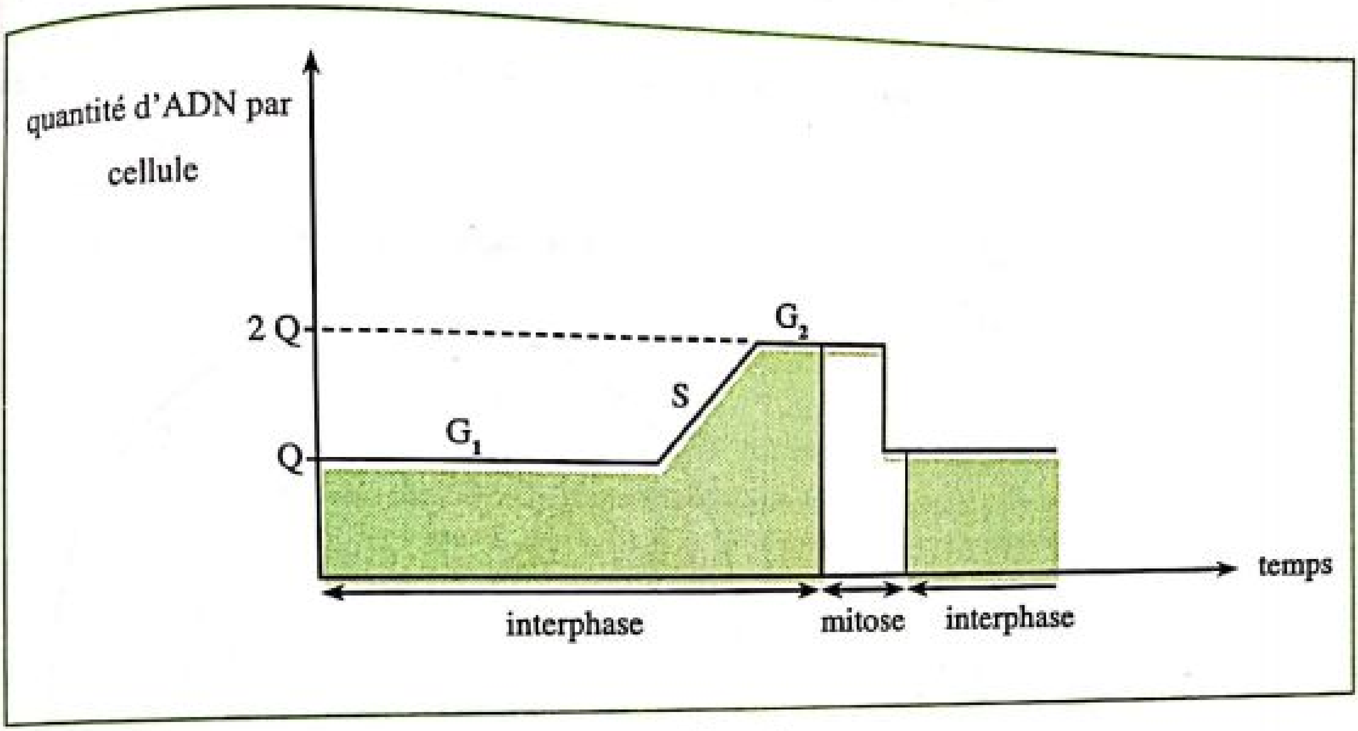
Les deux chaines (brins) sont liées par des liaisons hydrogènes entre les bases azotées : A associée à T, et G associée à C, et sont anti-parallèlles 3' → 5' contre 5' → 3'.



SVT

b - La duplication de l'ADN :

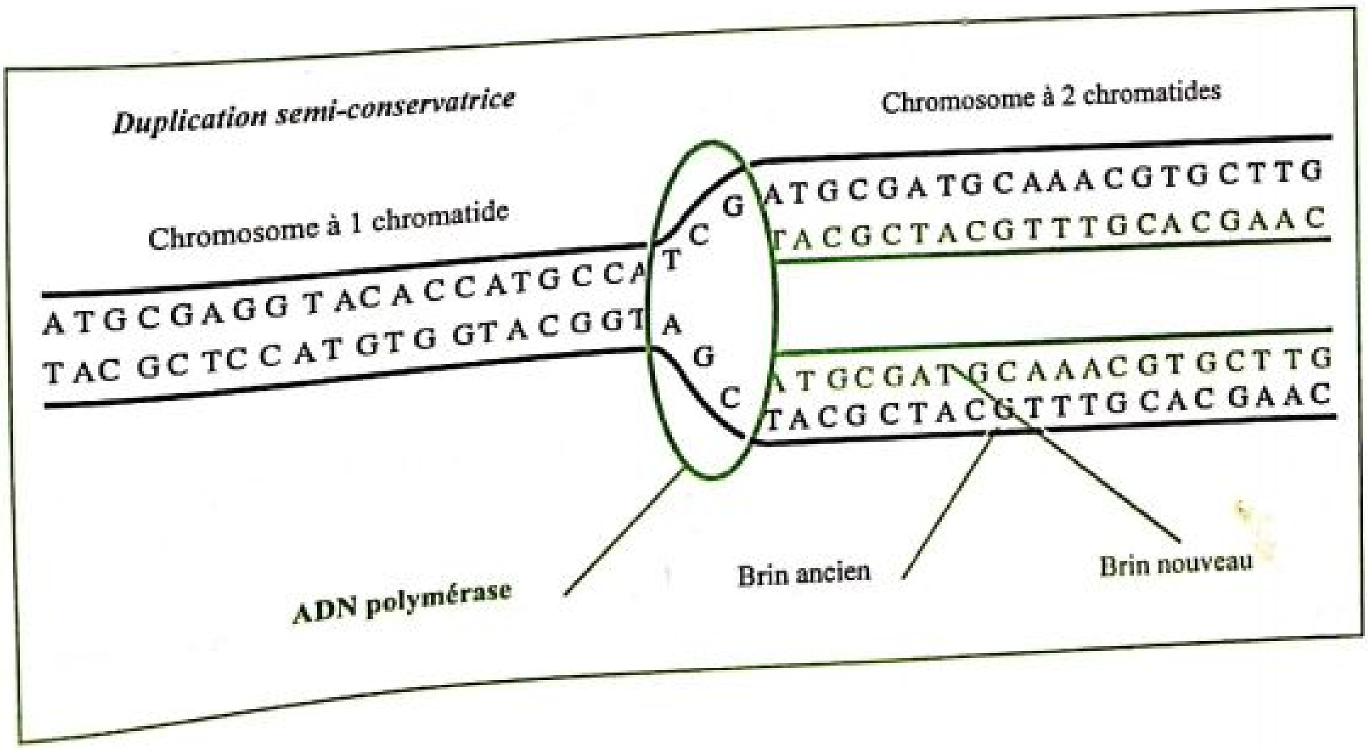
Pendant linterphase, la qualité d'ADN double:



Le cycle cellulaire comprend ainsi 4 phases : G1 , S , G2 et mitose

Pendant S de l'interphase, il ya duplication semi-conservatrice de l'ADN :

- Séparation des deux brins
- Incorporation de nucléotides sur les brins libres en respect de la complementarité des bases azotées.
- L'obtention de deux molécules filles d'ADN dupliques parfaites de la molécule - mère : c'est la réplication.

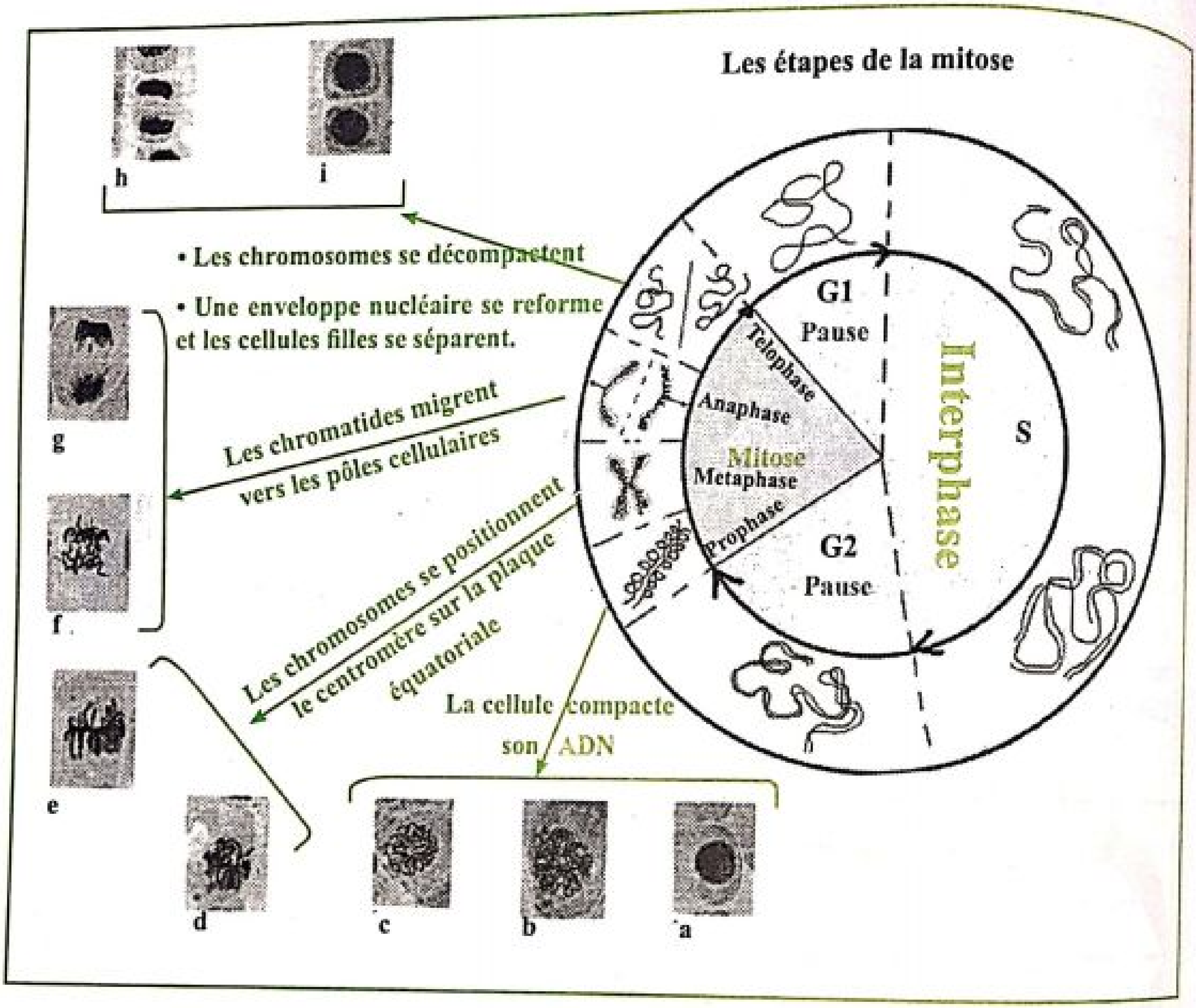


c - En conclusion :

Les propriétés de l'ADN sont liées à sa structure :

- Le codage de l'information génétique réside dans la séquence des nucléotides.

- Pendant la duplicaton de l'ADN, il ya duplication de l'information génétique, fondée sur la complémentarité des bases.



4 - L'expression de l'information génétique :

a - Définitions :

* Le gène : Une Séquence nucléotique d'ADN qui gouverne un caractère donné.

* Le caractère : Une caractéristique qualitative ou quantitave qui distingue un individu au sein de son éspèce et transmissible d'une génération à l'autre.

* L'allèle : Une forme que peut prendre un gène après mutation.

* La mutation : toute modification spontannée, imprévue et rare qui touche l'ADN au niveau d'un gène par subtitution, ou perte, ou gain d'un nucléotide ou plus.

b - La relation gène - protéine - caractère :

Le gène gouverne la synthèse d'une proteine, qui est, à son tour, résponsable de l'apparition d'un caractère héréditaire; d'où la relation :

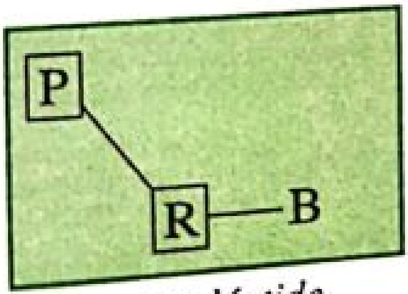
Gène ⟶ protéine ⟶ Caractère.

Une molécule nucléïque : ARN messager joue le rôle d'intermédiaire entre ADN dans le noyau, et la synthèse des protéïnes au niveau du cytoplasme.

la molécule d'ARN (Acide ribonucleïque) est constituée d'une seule chaine de nucléotides formé chacun de :

Acide phosphorique : H_3PO_4 ou Ⓟ

- Sucre pentose : Ribose $C_5H_{10}O_5$
- Base azotée parmis les quatre suivantes :
  - Adenine : A
  - Guanine : G
  - Cytosine : C
  - Uracide : U

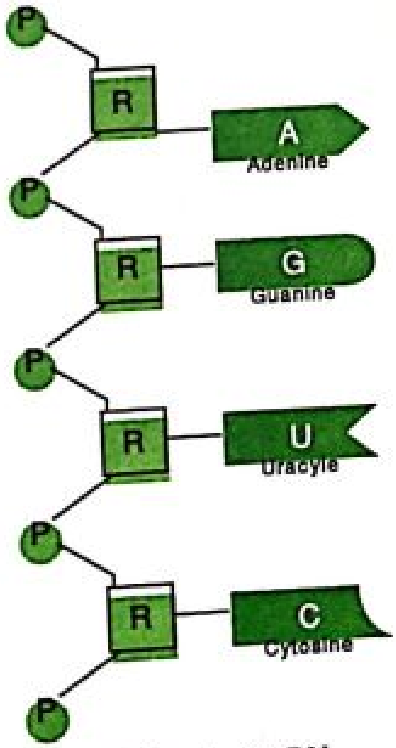


un nucléotide

Ⓟ Acide phosphorique

R Ribose

B Base azotée



Molecule d'ARN

Scanné avec CamScanner

Le code génétique est le système de correspondance entre les codons sur ARNm et les acides aminés dans la protéine.

Chaque acide aminé est codé par un codon de 3 nucléotides (3 bases azotées).

première lettre	deuxième lettre U	deuxième lettre C	deuxième lettre A	deuxième lettre G	troisième lettre
U	UUU, UUC } phénylalanine UUA, UUG } leucine	UCU, UCC, UCA, UCG } sérine	UAU, UAC } tyrosine UAA, UAG } codons stop	UGU, UGC } cystéine UGA codon stop UGG tryptophane	U C A G
C	CUU, CUC, CUA, CUG } leucine	CCU, CCC, CCA, CCG } proline	CAU, CAC } histidine CAA, CAG } glutamine	CGU, CGC, CGA, CGG } arginine	U C A G
A	AUU, AUC, AUA } isoleucine AUG méthionine	ACU, ACC, ACA, ACG } thréonine	AAU, AAC } asparagine AAA, AAG } lysine	AGU, AGC } sérine AGA, AGG } arginine	U C A G
G	GUU, GUC, GUA, GUG } valine	GCU, GCC, GCA, GCG } alanine	GAU, GAC } acide asparatique GAA, GAG } acide glutamique	GGU, GGC, GGA, GGG } glycine	U C A G

Ce tableau donne les diverses combinaisons possibles des 4 nucléotides pris 3 par 3 et leur « signification ».

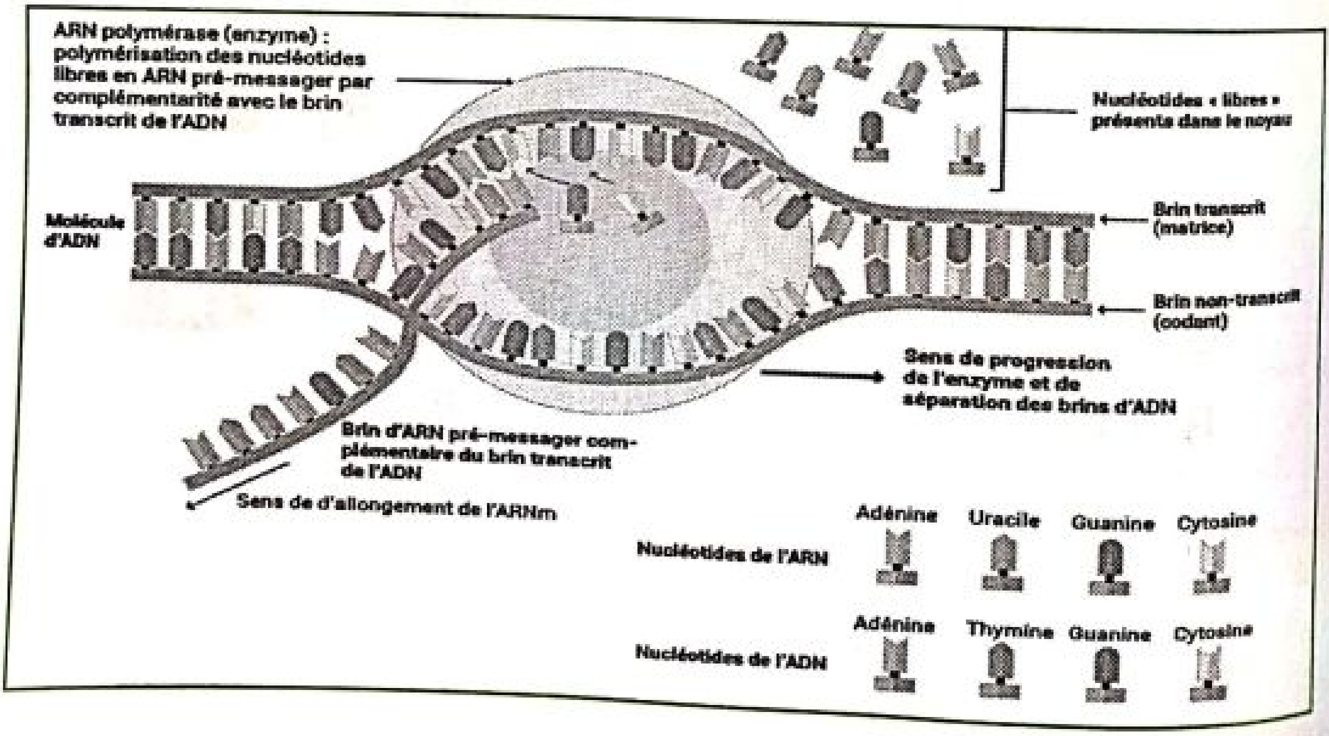
Il ya 64 codons possibles, dont 61 codent les 20 acides aminés, alors que 3 non sens codent la fin de la synthèse protéique.

c - L'expression de l'information génétique :

Elle fait intervenir deux mécanismes successifs : La transcription et la traduction.

* La transcription :

C'est la synthèse de l'ARNm à partir de l'ADN dans le noyau :



Les étapes de la transcription :

- La séparation des deux brins d'ADN au niveau d'un gène.
- La polymérisation des nucléotides à ribose en une chaine d'ARN par complementarité des bases sur un brin d'ADN.
- La séparation d'ARNm (copie d'ADN) à la fin du gène et refermeture de l'ADN.

• La traduction :

C'est le décodage de l'information portée par l'ARNm en une séquence d'acides aminés = Synthèse protéique.

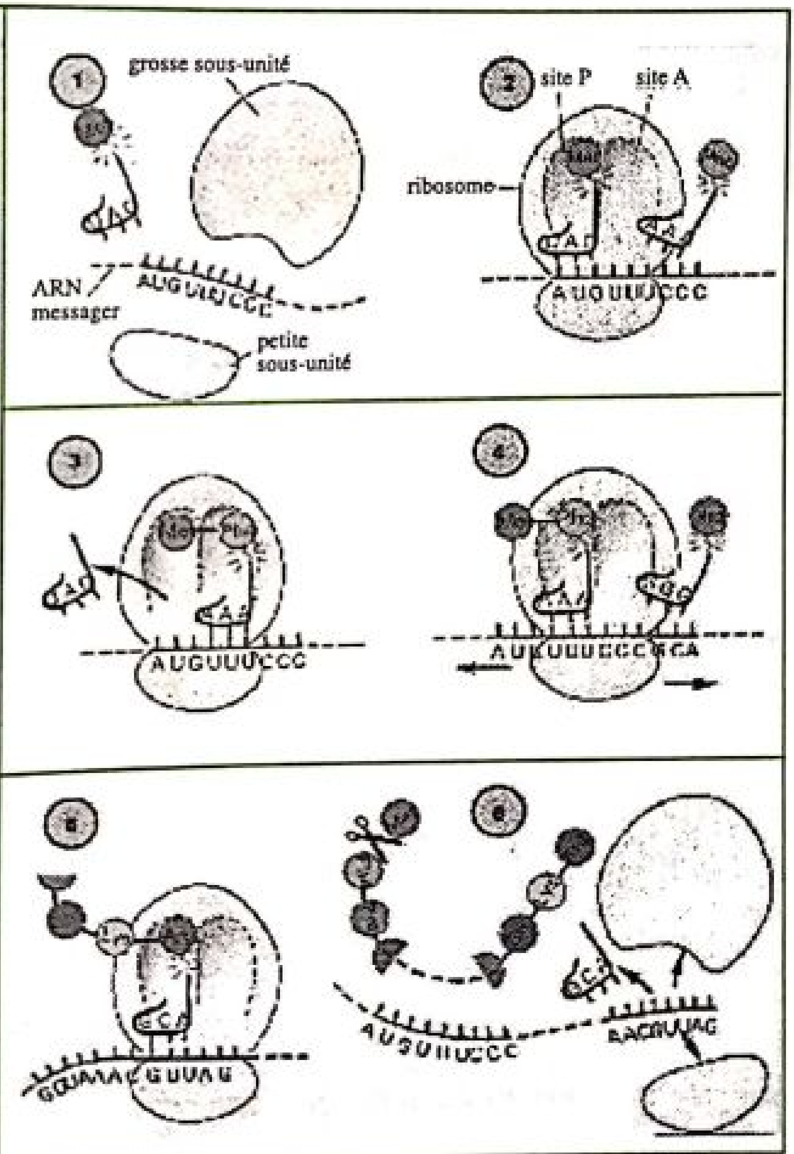
Elle fait intervenir :

- ARNm : Porteur de l'information génétique.
- ARNt : Transporte les acides aminés au lieu de la synthèse.
- Ribosomes : Lecteurs de l'information génétique, et elle se déroule en 3 étapes: l'initiation, l'élongation et la términaison.

1. Initiation de synthèse
Elle débute toujours au niveau d'un codon AUG de l'ARNm. Ce codon « initiateur» (ou codon début) détermine la mise en place :
- d'un ribosome qui s'assemble à partir de ses deux sous-unités jusque-là indépendantes ;
- de l'ARNt-méthionine se liant par son anticodon au codon AUG. Le ribosme possède alors deux sites fonctionnels : le site P (où est installé l'ARNt - Met lié au codon AUG) et le site A (au niveau duquel est situé le codon suivant de l'ARNm).

2. Elongations de la chaîne
La mise en place, sur le codon présent au site A, d'un nouvel ARNt - AA est suivie :
- de la libération de l'ARNt fixé au site P qui se décroche de son acide animé ;
- de la création d'une liaison peptidique entre les deux acides aminés présents dans le ribosome ;
- du déplacement relatif du ribosme par rapport à l'ARNm qui permet la libération du site A (l'ARNt portant les acides aminés accrochés «arrive» au site P et un nouveau codon « apparaît » au site A).

3. Terminaison de la syhthèse
C'est l'arrivée au niveau du site A d'un codon-stop qui interompt la sythèse en déclenchant la dissociation du complexe ARNm-ribosme-ARNt-polypeptide :
- les sous-unités du ribosme se séparent ;
- la chaine polypeptidique est libérée et la méthionine, premier acide aminé incorporé, est détaché de cette chaîne.



L'assemblage d'une chaine polypeptidique comporte trois étapes essentielles au cours desquelles interviennent tous les « acteurs » découverts dans les pages précédentes.

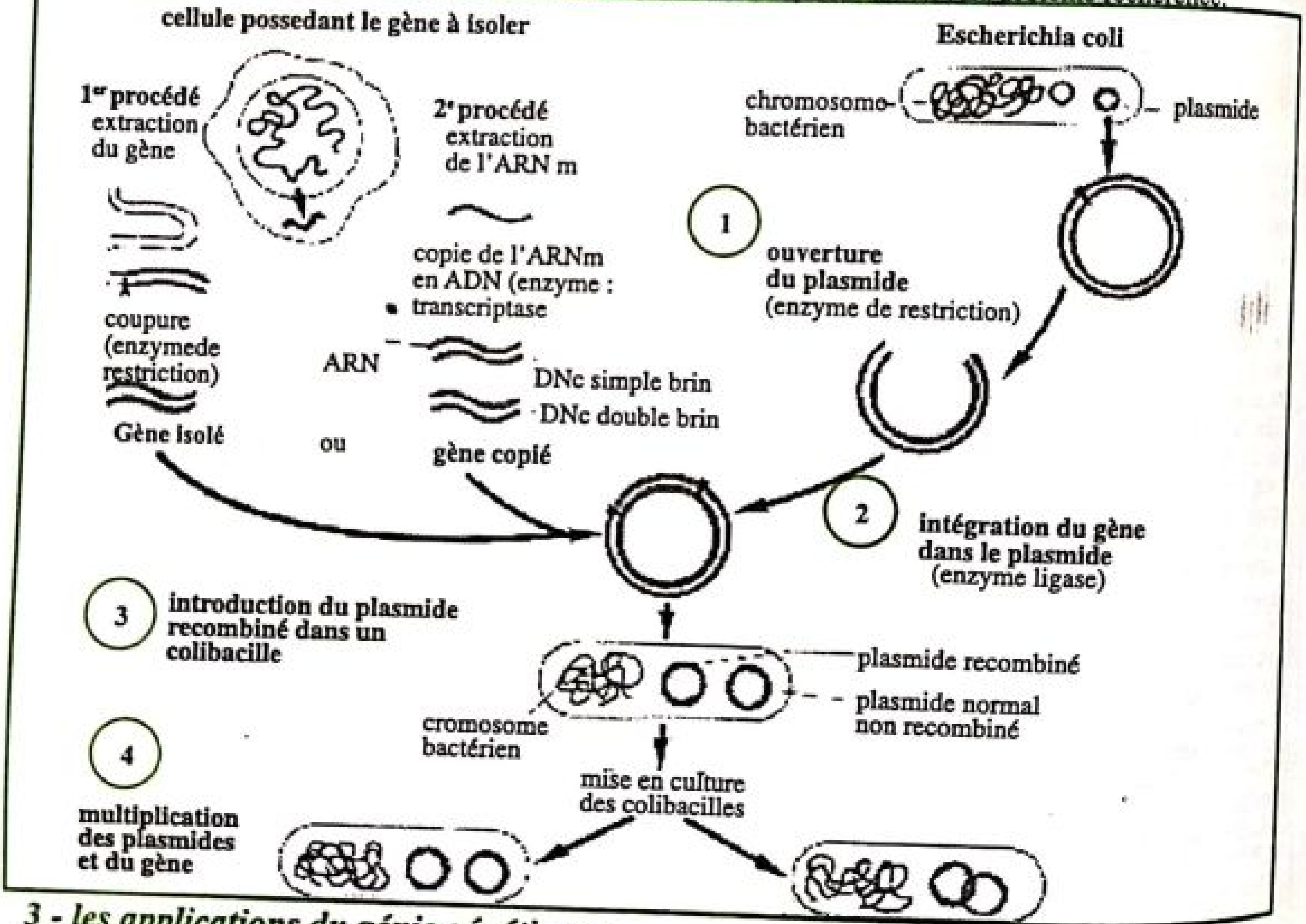
Chapitre 2 Le génie génétique.

1 - Définition :

Le génie génétique est l'ensemble des techniques et des outils qui permettent de transferer des génes d'une espèce à une autre.

2 - Les étapes du génie génétique :

- Isolement du gène à transfèrer = le gène recherché.
- Isolement et ouverture d'un plasmide = le vecteur du transfert.
- Integration du gène dans le plasmide ⟶ le plasmide recombiné.
- Introduction du plasmide recombiné dans une cellule hôte ⟶ cellule recombinée = cellule génétiquement modifiée.
- Mise en culture des cellules recombinées ⟶ Multiplication des plasmides et du gène.
- Expression du gène dans les cellules recombinées et récolte du produit final : La proteïne recherchée.



3 - les applications du génie génétique :

Le génie génétique a de multiples applications :

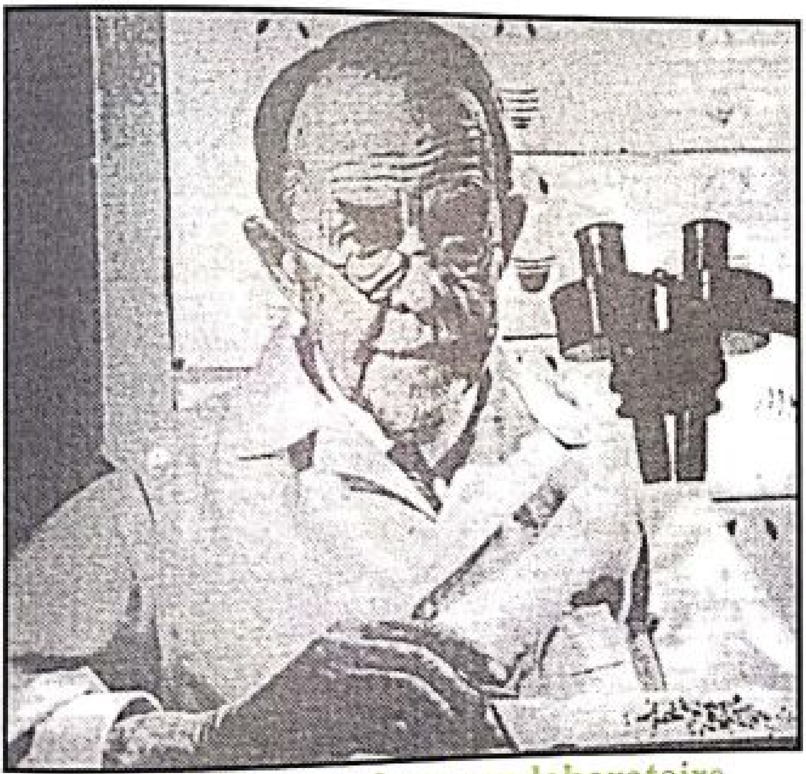
- Dans le domaine de la santé : Fabrication d'hormones, de vaccins..........
- Dans les domaines agro-alimentaire : créer des varietés résistantes aux parasites, amélioration des rendements ...... etc.

Scanné avec CamScanner

Unité n° 3

TRANSMISSION DE L'INFORMATION GÉNÉTIQUE PAR REPRODUCTION SÉXUÉE

SVT



T . H . Morgan dans son laboratoire

Mendel

SVT
PC
SM

Scanné avec CamScanner

L'essentiel du cours

SVT

Chapitre 1 *Reproduction sexuée et le brassage chromosomique et allélique*

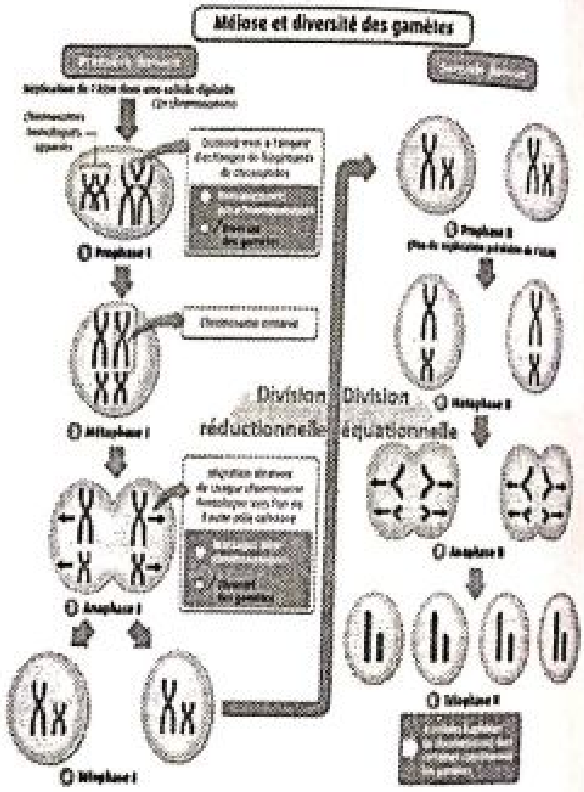
Le transfert de l'information génétique d'une génération à l' autre nécéssite deux processus fondamentaux : la meiose et la fécondation .

1 - Les étapes de la meiose :

La meiose est une succession de deux divisions qui permet d' obtenir quatre cellules - filles haploïdes (spores , gamètes) à partir d'une cellule - mère diploïde (2n ⟶ n).

⟶ La première division ou division réductionnelle assure la séparation des chromosomes homologues d'où la réduction de moitié le nombre de chromosomes (2n ⟶ n).

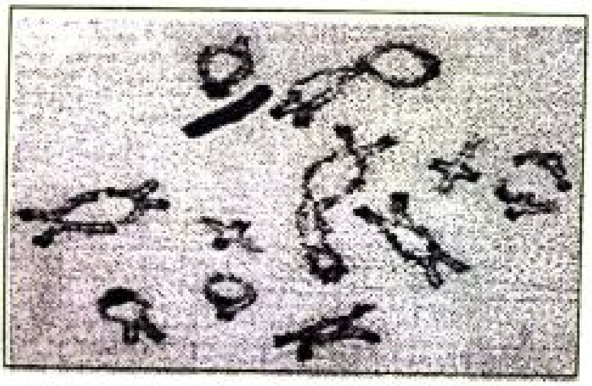
⟶ La deuxième division ou division équationnnelle assure la séparation des chromatides de chaque chromosome .La courbe d'évolution de la quantité d' ADN par cellule au cours de la meiose (doc1) indique que les deux divisions ne sont précédées que par une seule réplication d' ADN .

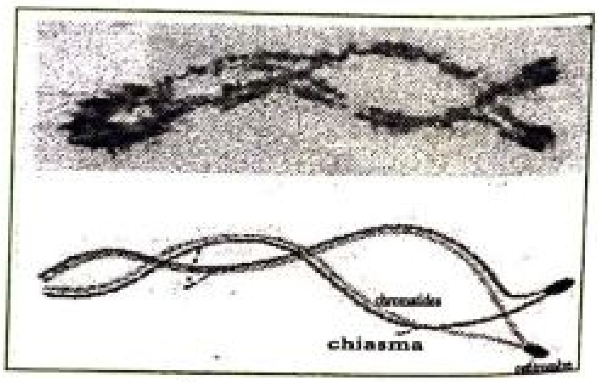


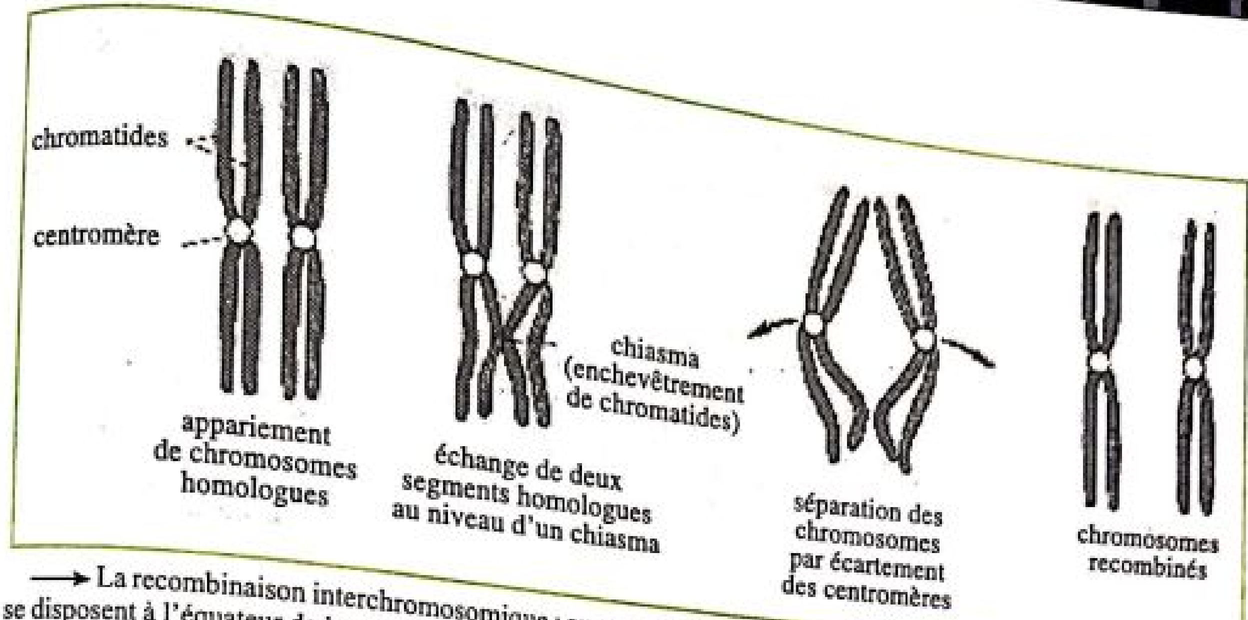
2 - Meiose et recombinaison génétique

Le brassage des caractères parentaux au cours de la meiose est la conséquence de deux types de recombinaisons :

⟶ La recombinaison intrachromosomique qui s'effectue pendant la la prophase I lorsque les paires de chromosomes homologues ou bivalents sont appariées . Cet accolement permet des échanges de fragements de chromatides ou enjambement appelés aussi crossing - over , ce phénomène entraine donc des échanges d'allèles entre les chromosomes et permet ainsi de brasser les génotypes parentaux avant la fécodation .

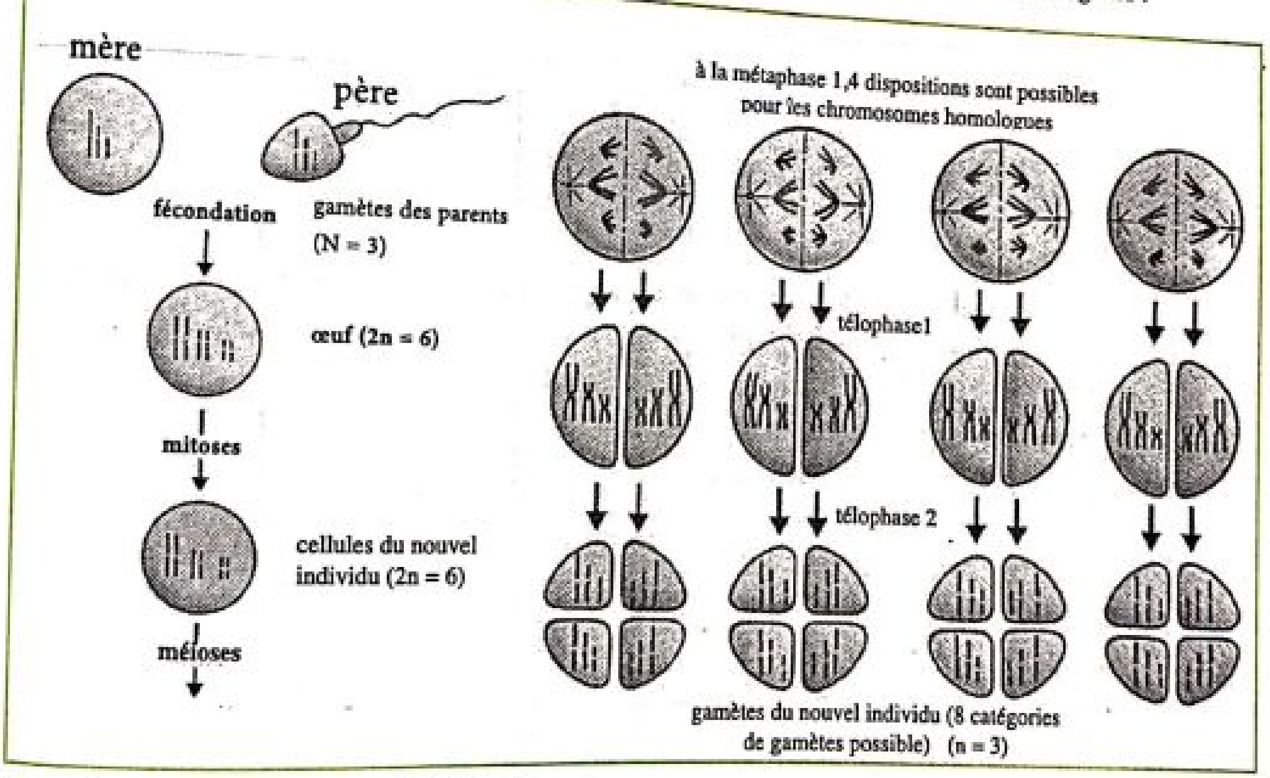






→ La recombinaison interchromosomique : au cours de la métaphase I , les paires de chromosomes homologues se disposent à l'équateur de la cellule avant de migrer de manière indépendante en deux lots vers les poles cellulaires lors de l'anaphase I .

Chacun des chromosomes peut posseder des allèles différents et la disposition aléatoire ainsi que la migration indépendante de chaque paire fait que les deux lots peuvent contenir un assortiment très varié de gènes .



3 - La fécondation : source de variabilité :

Les celules reproductrices (gamètes) possèdent n chromosomes , et la cellule œuf possède 2n chromosomes , la fécondation permet donc un rétablissement de la diploidie .

La rencontre aléatoire de deux gamètes offre donc 2^{2n} cellules œufs (2n = nombre de chromosomes).

Dans le cas de l' éspèce humaine , où n = 23 , la combinaison meiose / fécodation au cours de la reproduction séxuée permet d'obtenir une variabilité quasi - infinie parmi les individus.

Chapitre 2 Les lois statistiques de la transmission des caractères héréditaires chez les diploïdes

Gregor Mendel a consacré 8 ans de sa vie à l'étude de croisements entre des petits pois. Après plus de 10 000 croisements soigneusement choisis et repertoiriés, il a pu énoncé 3 lois concernant la transmission des caractères au cours de la reproduction sexuée. Ces lois, redécouvertes 16 ans après sa mort, sont désormais connus comme les lois de Mendel.

1 - loi d'uniformité des hybrides de première génération : tous les hybrides F1 sont semblables les uns aux autres (Parents des races pures).

2 - Loi de disjonction (ou ségrégation) des caractères en F_2 : sont différents les uns des autres. Cette différence ne s'explique que par une disjonction des caractères (allèles) au moment de la formation des gamètes qui sont donc pures.

3 - Loi d'indépendance des caractères : les phénotypes observés (en F2) montrent que la disjonction s'est faite de manière indépendante pour les divers couples d'allèles.

			Données	Résultat
Monophybridisme	L'héridité autosomable	Cas de dominace	On croise deux individus de race pure	$P_1 \times P_1 \longrightarrow$ Génération F_1 d'individus homogènes et hybrides de phénotype de l'un des parents.
			On croise les hibrides de F1 entre eux .	$F_1 \times F1$ génération F2 composé de : $-\frac{3}{4}(75\%)[dominant]$ $-\frac{1}{4}(25\%)[récessif]$
			Test de croisement ou test cross entre un hybride de F1 et un individu Po à caractère récessif.	F1 x Fo $\longrightarrow$ une génération composée de : - 50 % à phénotype dominant - 50 % à phénotype recessif
			On croise entre eux des hybrides dans le cas de gène létal.	On obtient une génération composée de : - $\frac{2}{3}$ à phénotype dominant - $\frac{1}{3}$ à phénotype recessif le génotype homozygote dominant est létal
		Codominace	On croise deux individus P de race pure.	P1 x P2 $\longrightarrow$ une génération F1 homogène, hybride à phénotype intermédiaire
L'hérédité	liée au sexe		On croise un ♂ A de race pure et une ♀ B de race pure.	Si on obtient une générétion non homogène dont le phénotype des ♂ est différent des ♀.

Scanné avec CamScanner

			Données	Résultats
Dilhybridisme	Génes indépondants		on croise deux individus de race pure	P1 x P2 ⟶ Génération F1 hybride et homogène à phénotype parental dominant .
			On croise entre eux les hybrides de F_1	F1 x F1 ⟶ F2 composée de : $\frac{9}{16}$: phénotype parental dominant $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$: phénotype recombiné $\frac{1}{16}$: phénotype parental récéssif .
			On croise un hybride de F_1 avec un parent récéssif : Test Cross	F1 x Po ⟶ une génération composée de 4 types de phéno-types différents : 25 %, 25 %, 25 %, 25 %
	Génes liés (linkage)	sans crossig over	On croise les hybrides F_1 entre eux .	F1 x F1 ⟶ F2 composée de : - $\frac{3}{4}$ caractère dominant - $\frac{1}{4}$ caractère récéssif
			On croise un hybride de F1 avec un individus à phénotype récéssif: Test Cross.	F1 x Po ⟶ F'2 composé de 2 phénontypes parentaux 50 %, 50 %
		avec crossig over	Test Cross	F1 x Po ⟶ F'2 composé de 4 phénontypes diférents : - 2 parentaux avec % élevé - 2 recombinés avec % bas

SVT

L'étude de l'héridité humaine peut être complété par d'autres méthodes.

La cytogénétique affine l'étude des chromosomes.

La réalisation de caryotype permet de diagnostiquer les malformations liées à une anomalie du nombre ou de la structure des chromosomes. Les techniques modernes de biologie moléculaire permettent une analyse précise de l'ADN et mettent en évidence la présence ou l'abscence de certains gènes.

Généralisation

SVT

Le rapport entre les allèles.

Allèle	Caractèristiques
Dominant	Il se trouve à chaque génération quel que soit le sexe. Chaque enfant malade a au moins 1 parent malade. 2 parents non atteints n'ont que des enfants non atteints.
Récessif	En général, le caractère n' apparaît pas à chaque génération, sauf dans le cas de parents homozygotes. Des enfants de parents phénotypiquement sains ont des enfants atteints.
Codominant	Le caractère d'un descendant est intermédiaire par rapport à celui exprimé par les parents.

La localisation du gène

- **Gène porté par les gonosomes**

Gène porté par la partie propre à y .

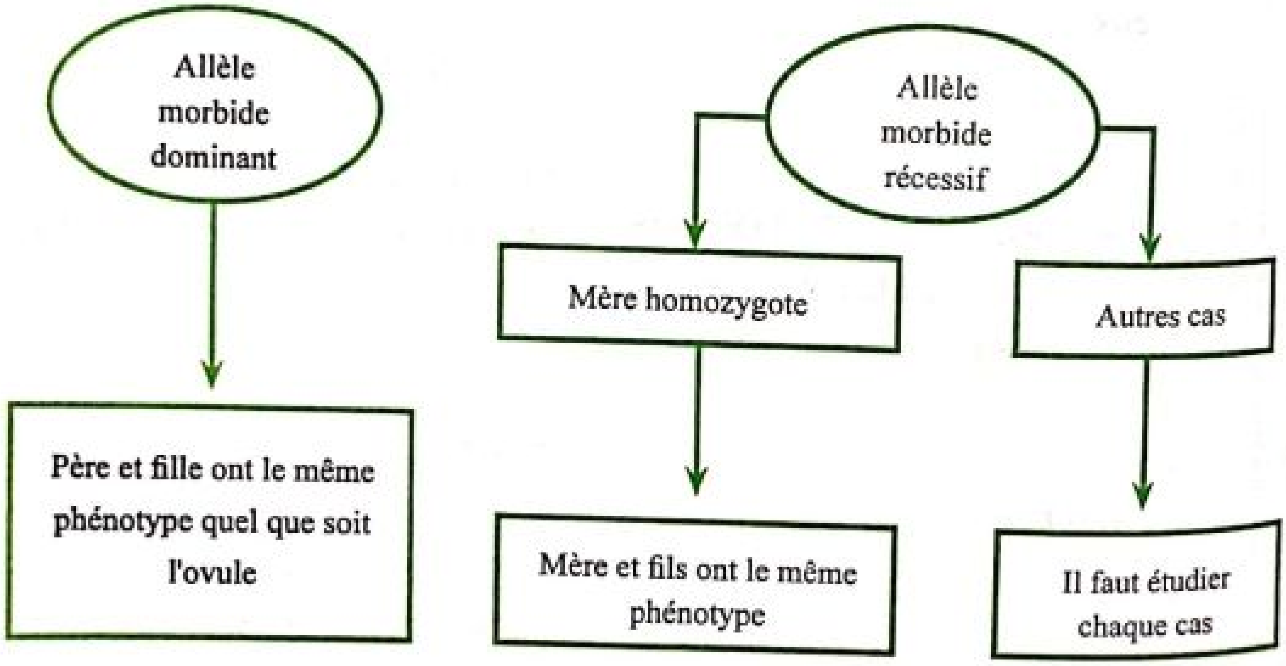
→ Seuls les individus mâles portent l'allèle considéré et donc peuvent être atteints.

→ Un garçon malade a toujours un père malade.

Point de départ possible pour la démonstration :

→ Un garçon malade → remonter au génotype de son père.

- **Gène porté par la partie propre à X**



Scanné avec CamScanner

- **Point de départ possible**

1 . femme dont le phénotype exprime l'allèle récessif [a] ⟶ génotype Xa/Xa

⇒ Un chromosome Xa provient de son père qui a donc obligatoirement le génotype Xa/y c.a.d. qu'il a le phénotype de l'allèle récessif [a].

2. homme de phénotype dominant [A] ⟶ génotype X_A/Y

⇒ Il lègue X_A à toutes ses filles qui auront toutes un chromosome X_A dans leur génotype et donc nécessairement un phénotype [A] .

Gène porté par les autosomes

Il n'ya pas de transmission privilégiée père - fille et mère - fils

- **Point de départ possible :**

Couple hétérozygote et démontrer qu'il peut avoir des filles et des garçons sains.

C - Les anomalies chromosomiques :

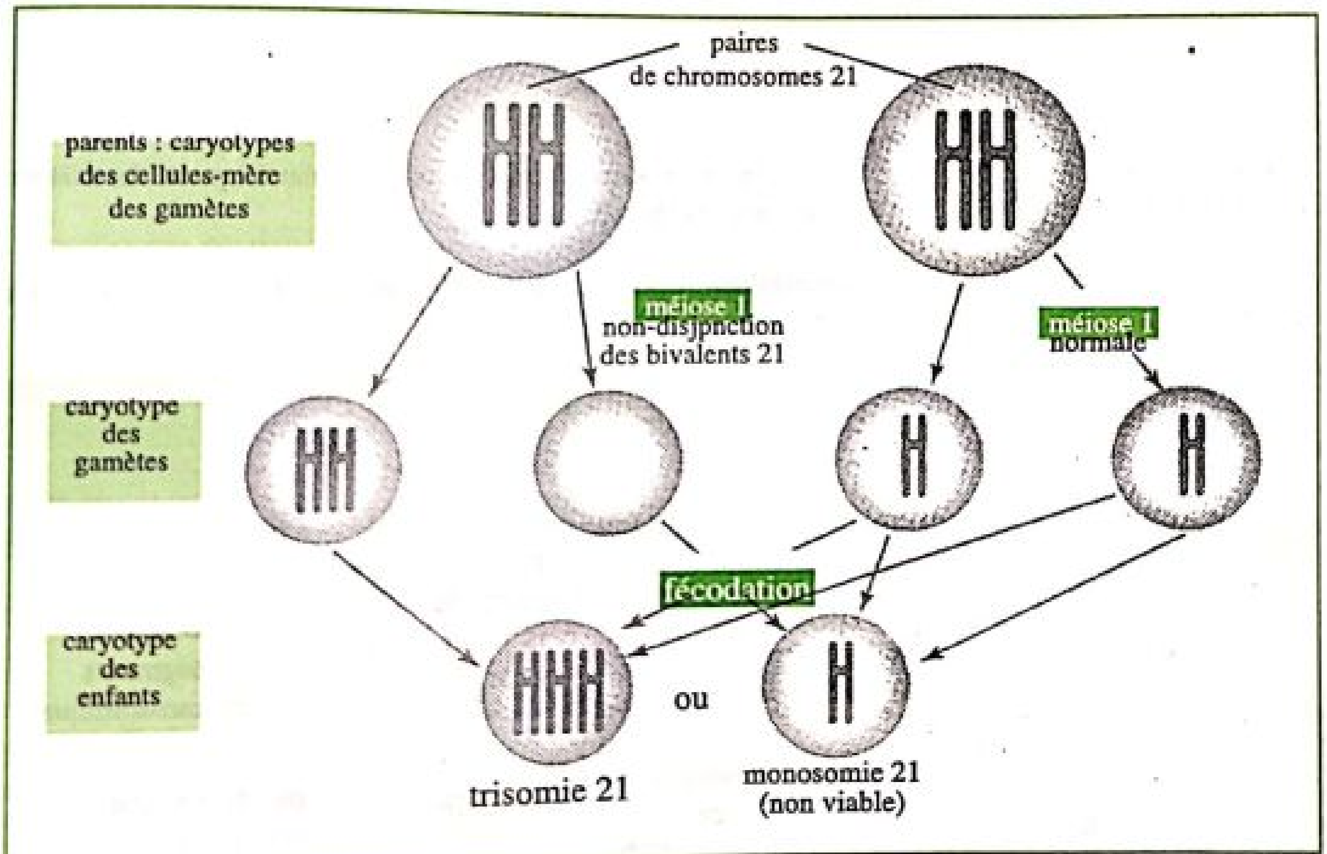
Dans certains cas des accidents génétiques sont dus à une alteration au niveau chromosomique . Le caryotype est déséquilibré, comportant des éléments ou parties d'éléments en excès ou en défaut.

1 - Des aberrations sur le nombre de chromosomes :

a . Au niveau des autosomes :

Exemple : la trisomie 21 , syndrome de Down ou mongolisme. L' étude du caryotype montre que le chromosome 21 est représenté par trois exemplaires au lieu de deux (Trisomie 21).

$$2n + 1 = 45A + XX(XY) (=47)$$



b . Au niveau des chromosomes sexuels :

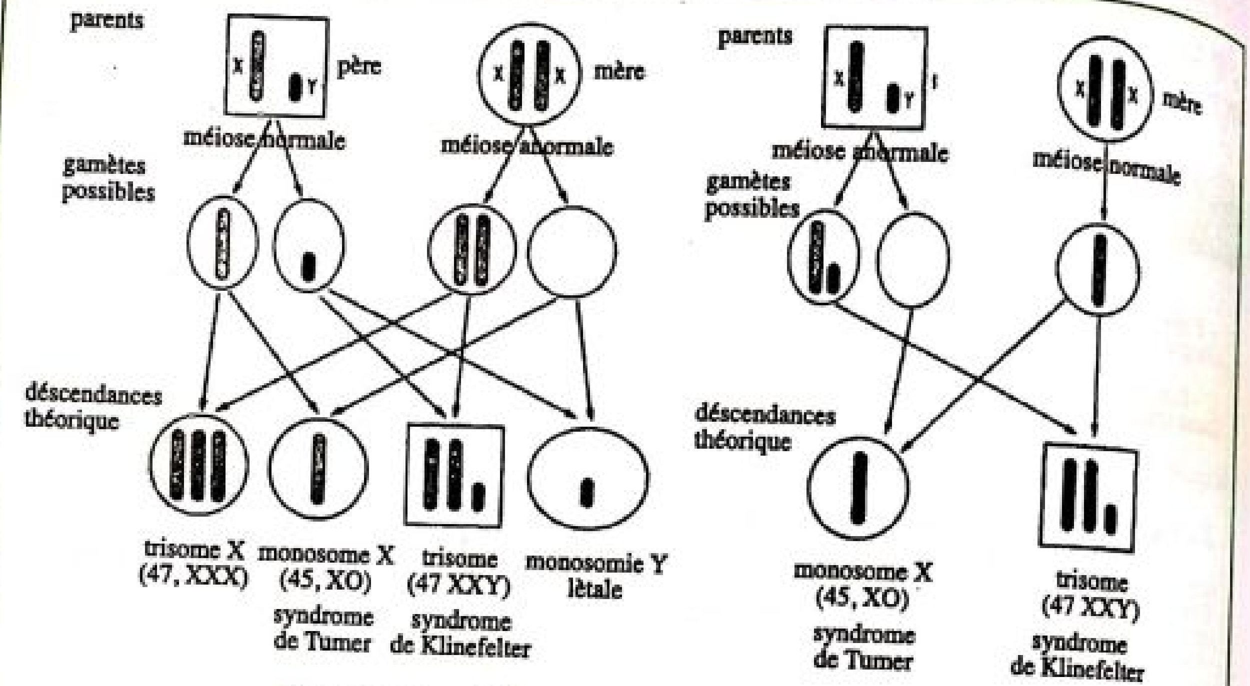
Exemple :

- Le syndrome de Turner affecte des femmes qui restent de petite taille: elles sont stériles et les caractères sexuels secondaires ne se développent pas. $2n - 1 = 22AA + X (=45)$

- Le syndrome de Klinefelter affecte des individus présentant à la fois des caractères sexuels masculins et feminins.

SVT

$$2n + 1 = 22\ AA + XXY = 47$$



Interprétation de l'apparition de caryotypes anormaux

3 - Des abérrations concernant la structure des chromosomes

a . La délétion:

La délétion est la perte d'un fragment plus ou moins important de chromosome. La plus fréquente des délétions est celle du bras court du chromosome 5 : appelé « cri du chat».

b - La translocation :

La translocation est un remaniement structural qui résulte du transfert d'un ségment de chromosome ou d'un chromosome entier sur un autre chromosome.

		ANOMALIE DE NOMBRE			ANOMALIE DE STRUCTURE		
		Monosomie	Trisomie		Délétion	Translocation	
						Simple	Réciproque
Exemples	Caryotype	2n - 1 = 45 XO	2n + 1 = 47 Trisomie 21	2n + 1 = 47 XXY	Perte d'un fragment du bras court du chr. 5	15 - 21	échange de segments chromo-somiques
	Maladie	Syndrome de TURNER	Syndrome de DOWN (mogolisme)	Syndrome de KLINFELTER	MALADIE	pas de maladie si translocation équilibrée	

3 - Le diagnostic anténatal

Dans le cas d'une « grossesse à risques » (âge de la mère , maladie héréditaire connue dans la Parenté) , le médecin tente de diagnostiquer d'éventuelles anomalies avant la naissance de l'enfant.

⟶ Le dignostic repose sur des analyses faites sur des tissus embryonnaires prélevés le plutôt possible :

- Prélèvement de liquide amniotique (ou amnéocentèse), ou prélèvement de sans fœtal dans le cordan ombilical à partir de la 17ème semaine de grossesse.

- Prélèvement de villosités choriales dès la 8ème semaine de grossesse

⟶ Les recherches éffectuées sur ces prélévements sont très variées :

- Détéction d'aberration chromosomiques par réalisation d'un caryotype de cellule fœtale
- Détection de maladies héréditaires.

SVT

Scanné avec CamScanner

Génétique des populations.

La génétique mendélienne étudie la transmission des caractères héréditaires entre parents et leurs déscendants. Les croisements sont considérés un à la fois. Prenant l'exemple d'un croisement monohybride :

Aa x Aa

F1 : 1/4 AA 1/2 Aa 1/4 aa

La génétique des populations décrit les propositons des génétypes au sein d'un ensemble d'individus issus de croisements non controlés entre de nombreuses parents.

♀ \ ♂	AA Aa Aa aa AA aa Aa AA aa aa Aa aa AA Aa aa aa Aa aa AA Aa AA
AA aa Aa Aa AA Aa aa AA AA aa AA Aa AA aa	AA ? Aa ? aa ?

La génétitique des populations a pour objectif de décrire la strucure génétique d'une population en temps donné et de prévoir l'évolution de cette structure dans le temps en fonction des forces qui s'éxercent sur la population. La structure génétique d'une population est connue pour un locus. La structure génétique d'une population n'est pas figée mais elle évolue et passe dans certains cas par des phases stable (situations d'équilibre).

Dans ce chapitre nous allons aborder comment calculer les fréquences alléliques et génotypiques d'une population. Nous décrivons aussi les conditions qui permettent à une population d'être en équilibre. Nous introduisons donc la loi d'équilibre de Hardy-Weinberg et les forces qui agissent sur cette équilibre : Mutations, Migration, Sélection et dérive.

I - Définition.

- Population : groupe d'individus de même espèce ; et qui peuvent se reproduire entre eux en un temps donné dans un espace donné.
- Pool génétique : l'ensemble des génétypes des individus d'une population pour chaque gène. ou la somme de tous les génotypes individuelles pour chaque gène.
- Fréquence allèlique : d'un gène Ai est égale au rapport du nombre d'allèles Ai au nombre total d'allèles au locus considéré.
- Locus : localisation précise d'un gène particulier sur un chromosome.
- Pangamie : condition ou la rencontre des gamètes lors de la fécondation se fait au hasard.
- Panmixie : condition ou la rencontre des individus lors de reproduction se fait au hasard.
- Facteurs évolutifs : facteurs qui tendraient à faire évoluer la population vers un état d'équilibre précis, on parle aussi des forces évolutives.

II - Calcul des fréquences allèliques et génotypes.

La génétique des populations s'intéresse à l'évolution des fréquences allètiques et génotypes. Il est donc important dans un premier temps de savoir calculer ces fréquences.

$$\text{Fréquence génotype} = \frac{\text{nombre d'individus porteurs du génotype étudié}}{\text{nombre total d'individus de la population}}$$

$$\text{Fréquence allèliqe} = \frac{\text{nombre d'allèles du type considéré}}{\text{nombre total d'allèles}}$$

$$= \frac{\text{nombre d'allèles du type considéré}}{\text{2 allèles individu DIPLOIDE xnombre d'dividus}}$$

I - Pour des populatins hypothètiques.

Soit deux populations hypothèques suivantes

	AA	*Aa*	*aa*
Population 1	*50*	*0*	*50*
Population 2	*25*	*50*	*25*

On a :

- Deux allèles différents : cas d'un gène diallèlique (A et a). On note la fréquence (A) par p et la fréquence (a) par q.

- Trois génoypes : AA , Aa et aa . On note la fréqence génotyque de (AA) par D
- Trois génoypes : AA , Aa et aa . On note la fréqence génotyque de (Aa) par H
- Trois génoypes : AA , Aa et aa . On note la fréqence génotyque de (a a) par R

* calcul des fréquences pour la pop 1 :

Fréquence génotypique (AA) = D

$$D_{AA} = \frac{50}{100} = 0,5$$

Fréquence génotypique (Aa) = H

$$H_{Aa} = 0$$

Fréquence génotypique (aa) = R

$$R_{aa} = \frac{50}{100} = 0,5$$

Fréquence allèlique (A) = P_A

$$P_A = \frac{50x2+0+0}{2x100} = \frac{100}{200} \qquad P_A = 0,5$$

Fréquence allèlique (a) = P_a

$$q_a = \frac{50x2}{2x100} = \frac{100}{200} \qquad q_a = 0,5$$

* Pour la population 2 on trouve :

$$D_{AA} = \frac{25}{100} = 0,25 \qquad H_{Aa} = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$R_{aa} = \frac{25}{100} = 0,25 \qquad P_A = \frac{(25x2)+50}{2x100} = 0,5$$

$$q_a = \frac{5+(25x2)}{2.100} = 0,5$$

On a donc pour les deux pop. $\quad P_A + p_a = 1$ et $D + H + R = 1$

$$P_A = D + \frac{H}{2} \qquad \text{et} \qquad q_a = R + \frac{H}{2}$$

Scanné avec CamScanner

Dans les deux populations, la fréquence des allèles A est de (0,5), cependant les fréquences génotypiques de la population 1 sont différents de ceux de la population 2. donc la fréquence des allèles ne donne aucune information sur les fréquences génotypiques d'une population.

2 - Pour les populations naturelles.

Dans les populations naturelles ce sont les phénotypes qui sont observables et non pas les génotypes des individus, il faut donc établir le lien entre phénotype obsérvé et génotype de l'individu, c-à-d déterminer le type de dominance.

a) cas de codominance : dans ce cas on a une relation génotype - phénotype directe. Si on étudié un gène dialletique avec codominance, on observe dans la population trois génotypes et les propositions des phénotypes sont égaux aux génotypes.

Exemple : Chez l'homme, l'examen des groupes sanguins fournit de nombreuses statistiques très utilisées en génétique des populations humaines. Sur un échantillon de 1279 donneurs anglais, on a observé pour le groupe sanguin MN les valeurs suivants :

Groupe	[M]	[M]	[N]	$\sum$
Génotype	MM	MN	NN	
Effectif des phénotypes	363	634	282	1279

Il existe deux allèles codominant M et N on a donc :

$$f(MM) = D = \frac{363}{1297} = 0,2838.$$

$$f(MN) = H = \frac{634}{1279} = 0,4957$$

$$f(NN) = R = \frac{282}{1279} = 0,2205 \qquad D+H+R=1$$

Les fréquence allèliques dans cet échantillon sont donc : $F(M) = p = D + \frac{H}{2} = 0,2838 + \frac{0,4957}{2}$

$F(M) = 0,532$

ou $F(M) =$ $F(M) = 0,532$ $F(N) = q = R + \frac{H}{2} = 0,2205 + \frac{0,4957}{2}$ $F(N) = 0,468$

ou $F(N) = \frac{(282x2)+634}{2x1279} = 0,468$ $\frac{(363 \times 2)+634}{2 \times 1279} = \frac{1360}{2558}$

la formation d'un nouvel individu de la génération suivante G_1 est alors le résultat de deux tirages au sort indépondants, l'un parmis les gamètes mâles, l'autres parmi les gamètes femelles (croisement au hasard = panmixie). les fréquences des différents génotypes de la génération suivante G_1 résultent alors de la répétition de ce simple tirage au sort qui donnera les fréquences génotypiques suivantes.

♂(G_0) / ♀(G_0)	Gamètes mâles A (p_0)	Gamètes mâles a (q_0)
Gamètes a (p_0)	AA (p_0^2)	Aa (p_0q_0)
Gamètes a (q_0)	Aa (p_0q_0)	aa (q_0^2)

Scanné avec CamScanner

Dans la génération G_1 les fréquences génétypiques sont donc :

$AA = p_o^2$ $\quad$ $Aa = 2\,p_o q_o$ $\quad$ $aa = 2\,q_o^2$

Dans une population théorique idéale, ces fréquences seront également celles des adultes reproducteurs de la génération G_1 (abscences de sélection), pour lesquels les fréquences allèliques seront :

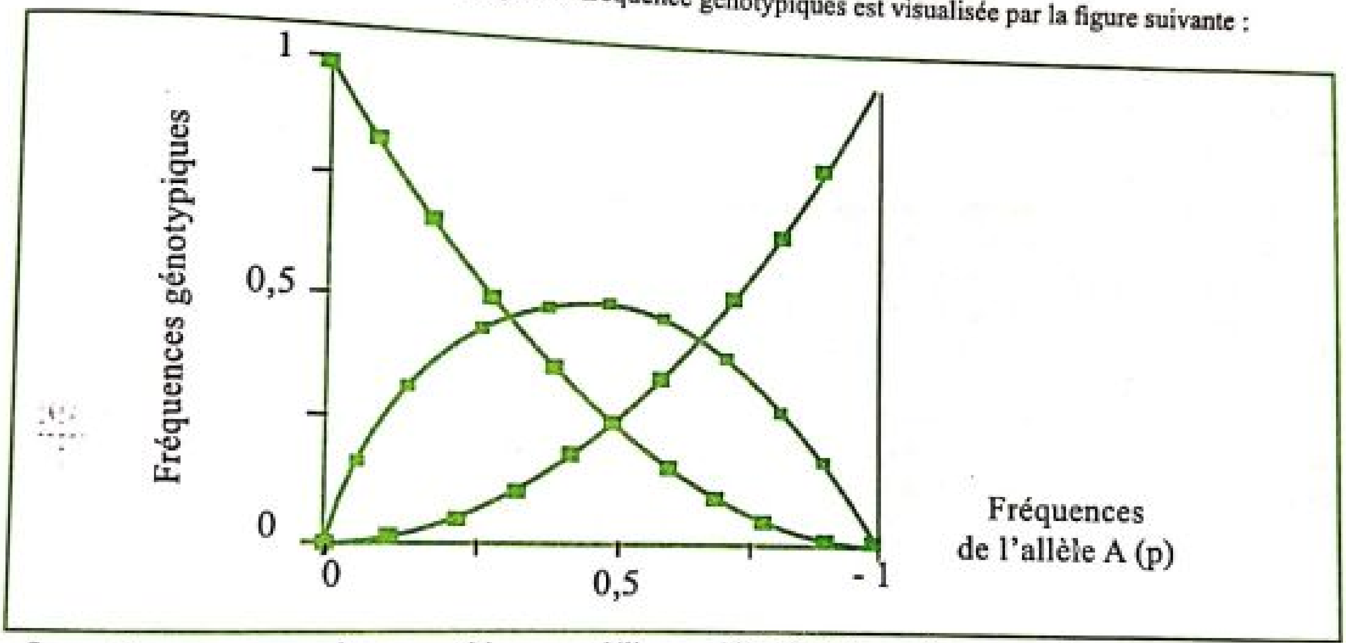
pour A $\quad p_1 = p_o^2 + p_o q_o = p_o(p_o + q_o) = p_o = p$

pour a $\quad q_1 = q_o^2 + p_o q_o = q_o(p_o + q_o) = q_o = q$

Les fréquences allèliques n'ont donc pas changé, ce qui donnera à la génération suivante G_2 les mêmes fréquences génotypiques qu'à la génération précédente soit p_2 AA, 2pq Aa, et q^2 aa. Le système est donc stable aussi bien en ce qui concerne les fréqences allèliques que les fréquences génotypiques. On dit qu'en est à l'équilibre de hardy-Weinberg dont la loi peut s'énnocer de la façon suivante :

Dans une population théorique idéale, les fréquences allèliques et les fréquence restent stables de génération en génération. Les fréquences génothypiques sont déterminées à partir des fréquences allèliques par une relation simple qui correspond au développement du binôme $(p + q)^2$ dans le cas d'un locus à deux allèles A de fréquence p. et a de fréquence q. soit p^2 pour le génotype AA, 2pq pour Aa et q^2 pour aa.

Cette relation entre fréquences allèliques et fréquence génotypiques est visualisée par la figure suivante :



On peut remarquer que les propositions mendéliennes 1/4, 1/2, 1/4 que l'on trouve lorsque l'on croise deux hétérozygotes est un cas particulier de la loi de Hardy-weinberg où p = q = 0,5.

Chaque hétérozygote Aa possède comme fréquence allèlique f(A) = f(a) = 1/2.

3 - Application et utilisation du modèle de Hardy-Weinberg (test de l'équilibre).

Une question centrale est de savoir si la loi de Hardy-Weinberg établie pour une population théorique idéale s'applique également aux populations naturelles. Cette loi s'appuie en effet sur un raisonnement probabiliste, ne s'applique en théorie qu'à des populations d'effectif infini, et suppose remplies toute une série de conditions qui ne sont rarement respectées dans la nature (abscence de mutation, migration, séléction). L'application de la loi de hardy-Weinberg dans les populations naturelles peut être vérifiée pour des caractères codominats pour lesquels le calcule des fréquence allèliques est possible. C'est le test de l'équilibre.

Le principe du test est simple et peut être résumé en 3 étapes :

1 - échantionnage d'une population, dénombrement des éffectifs génotypiques réels (possible grâce à la codominance) et calcul des fréquences allèliques réelle parmi les N individus échantillonnés soit p= f(A) et q = f(a).

2 - calcul des effectifs génotypiques attendus dans une population théorique idéale qui aurait le même éffectif et les même fréquences allèliques que la population étudiée soit:

$AA = p^2 \times N$ $\quad$ $Aa = 2\,pq \times N$ $\quad$ $aa = q^2 \times N$

SVT

3 - comparaison des effectifs observés et des effectifs attendus (comparaison des deux distributions) par un test statistique du Chi Deux (ou d'autres tests). Le test du Chi Deux nécessite le calcule de la distance X_2 permettant de tester l'hypotèse d'égalité entre la distribution observée et la distribution théorique (hypothèse H_0).

$$X^2 = \Sigma \frac{(\text{effectifs observés - effectifs théoriques})^2}{\text{effectifs théoriques}}$$

La somme est effectuée sur tous les génotypes et la valeur X^2 en foction de 2 paramètres est comparée à une valeur seuil, lue dans une table X^2, en fonction de 2 paramètres : un risque α choisi par l'utilisateur qui est en général 5%, et un nombre de degrés de liberté (ddl) égal à la différence entre le nombre de génotypes et le nombre d'allèles du système génétique étudié.

Si X^2 calculé est inférieur à X^2 seuil, H_0 est accéptée et en conclut que la population suit la loi de Hardy-Weinberg donc la population est à l'équilibre.

Diagnostic et conseil génétique

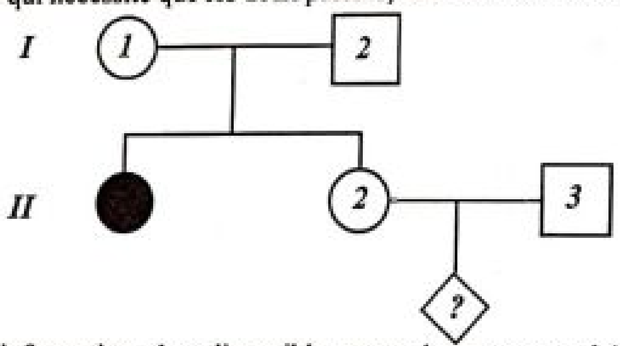
La loi de Hardy-Weineberg permet de faire des prévisions sur le génotype d'un individu lorseque l'on connaît la population dont il est issu. Ce calcule est utilisé en génétique humaine pour calculer la probabilité qu'un individu soit atteint d'une anomalie génétique. C'est le conseil génétique.

Le calcule du risque d'apparition d'une anomalie génétique chez un individu donné dépend de plusieurs paramètres:

- du déterminisme du caractère et des relations de dominace entre les allèles.
- de la fréquence du gène responsable de la maladie dans la population.
- de la généalogie de l'individu notamment des phénotypes des ascendants, descendants et collatéraux.

Pour une maladie autosomique recessive déterminée par un allèle a de fréquence q. la probabilité qu'un individu dont on ne connaît ni la généalogie ni le phénotype soit atteint par cette maladie correspond à la fréquence de ce phénotype dans la population soit q^2.

Le diagnostic s'affine considérablement lorsque l'on dispose de plus d'informations par exemple dans la génologie suivante où il s'agit de calculer la probabilité que le couple formé des individus sains II_2 et II_3 donne naissance à un enfant atteint de l'anomalie ce qui nécessite que les deux parents, tous les deux sains, soient hétérozygotes.



Pour l'individu II_3, aucune information n'est disponible, excepté son propre phénotype. La probabilité que cet individu soit porteur de l'allèle a est $2pq/(p^2+2qp)$ c'est à dire la fréquence des indivdus hétérozygotes parmi les sains dans la population.

L'individu II_2 ayant une sœur atteinte, leurs parents sont obligatoirement tous les deux hétérozygotes et la probabilité est alors de 2/3 pour que II_2 soit hétérozygote sachant qu'il est lui même non atteint. (2/3 et non 1/2 car le phénotype de l'individu II_2 est connu).

La probabilité pour que le couple II_2 x II_3 donne naissance à un enfant atteint de l'anomalie est est alors la suivante:

$$\boxed{(2pq/p^2 + 2pq) \times 2/3 \times 1/4}$$

Soit [proba (père Aa) x proba (mère Aa) x proba (enfant aa sachant les parents Aa)].

Scanné avec CamScanner

4 - Transmission des gènes liés au sexe :

Pour les caractères portés par les chromosomes sexuels, les deux sexes ont des constitutions génétiques différentes et il faut distinguer :

- Le sexe homogamétique :qui porte les deux même chromosomes sexuels (femme XX chez les mammifères, certains insectes dont la drosophile ; mâle ZZ chez certains crustacés et papillons). Ce sexe est diploïde pour ce chromosome.

- Le sexe hétérogamétique: qui porte deux chromosomes sexuels différents (ou un seul) donc haploïde ou hémizygote (mâles XY chez les mammifères, femelles WZ chez les custacés et papillons). Ce sexe est haploïde (hémizigote) pour ce chromosome.

- Généralisation à un locus lié au chromosome X :

Dans une espèce où le sexe femelle homogamètique (XX) et le sexe mâle hétérogamètique (XY), les femelles possèdent deux exemplaires des gènes portés par le chromosome X tandis que les mâles n'ont possède qu'un seul.

Si les deux sexes sont en nombre égal dans la population, 2/3 des chromosomes X sont portés par des femelles, et 1/3 par les mâles.

$$f(A) = p = pm/3 + 2p/3$$
$$f(a) = q = qn/3 + 2qn/3$$

p_m et p_f = fréquences de A dans les sexes mâles et femelles

q_m et q_f = fréquences de a dans les sexes mâles et femelles

Si les fréquences sont égales dans les deux sexes : $p_m = p_f = p$, $q_m = q_f = q$

Si les croisements se font au hazard on on aura l'échiquier suivant :

Gamète mâle			***Y***
Gamète femelle	X^A (p)	X^a (q)	1/2
XA (p)	X^AX^A (p^2)	X^AX^a (pq)	X^AY (p)
Xa (q)	X^AX^a (pq)	X^aX^a (q^2)	X^aY (q)
Descendants	$p^2 + 2pq + q^2 = 1$ (♀)		$p + q = 1$ (♂)

Dans le cas d'une égalité des fréquences allèliques chez les femelles et les mâles, les fréquences génotypiques chez le sexe homogamètique sont décrites par la loi de Hardy-Weinberg, et chez le sexe hétérogamètique, elles sont égales aux fréquences des allèles.

- Si l'allèle morbide (q) est recessif on a :
- La fréquence d'apparaition de la maladie

Chez les ♂ est q → [a]

Chez les ♀ est q^2 → [a] $\quad 0 \le q \le 1$ donc $q > q^2$

La maladie apparait chez les ♂ plus que ♀.

- Si l'allèle morbide (A) est dominant on a :
  - La fréquence d'apparaission de la maladie

Chez les males est p → [A] $\quad 0 \le q \le 1$

Chez les ♀ est $p^2 + 2pq$ → [A] $\quad 0 \le p \le 1$

Donc $p2 + 2pq > p$

La maladie apparait chez les ♀ plus que les ♂

SVT

RÉSUMÉ - CONSEQUENCES DE LA LOI DE HW

- Que l'on soit ou non sous HW, les fréquences génotypiques (D, H, R) permettent de calculer les fréquences allèliques (p,q) , par : $p = D + H/2$, $q = R + H/2$.
- Par contre, si et seulement si l'on est sous HW, on peut calculer les fréquences génotypiques à partir des fréquences allèliques, par $D = p^2$, $H = 2pq$, $R = q^2$.
- Les relations de dominance entre allèles n'ont aucun effet sur l'évolution des fréquences allèliques.
- Les fréquences allèliques restent stables au cours du temps, les fréquences génotypiques aussi.
- La ségrégation mendélienne aléatoire des chromosmes préserve la variabilité génétique des populations.
- «L'évolution» étant définie par un changement des fréquences allèliques, une population diploïdes idéale n'évolue pas.
- Seules les violations des propriétés de la population idéale permettent le processus évolutif.
- La démarche à suivre en pratique dans un problème est toujours la même :

1 - Les Effectifs Observés ⟶ donnent les Fréquences génotypiques (Observées).

2 - Calculez les Fréquences Allèliques.

3 - Si HW (par hypothèse), alors $D = p^2$, $H = 2pq$, etc ... : nous calculons des Fréquences Génotypiques Théoriques sous HW.

4 - Les fréquences génotypiques calculées ⟶ donnent les éffectifs Calculés.

5 - Comparaison Efféctifs Observés - Efféctifs calculés.

SVT

III - Les facteurs ou forces évolutifs.

1 - Les mutations :

Une mutation est une modification de l'information génétique dans le génome d'une cellule ou d'un virus. Cest donc une modification de la séquence de l'ADN. Selon la partie du génome touchée, les conséquences d'une mutation peuvent varier. Une mutation ne sera héréditaire que si la la cellule mutée forme un nouvel organisme.

1-1 - Types de mutation :

a - Mutations ponctuelles : Une mutation est dite ponctuelle quand elle touche un ou plusieurs nucléotides d' un même gène .

⊕ *Mutation par substitution :*

- *Mutations faux sens :* Cette mutation ponctuelle se traduit par le remplacement d'un nucléotide par un autre. Dans certains cas, cette modification entraine une modification de l'acide aminé codé, laquelle peut avoir ou non une répercussion sur la fonction de la protéine produite par le gène.

- *Mutation non-sens :* Le changement d'un nucléotide provoque le remplacement d'un codon spécifiant un acide aminé par un codon-stop. cela entraîne la production d'une protéine tronquée.

- *Mutations silencieuse :* Ce sont des mutations qui ne modifient pas la séquence d'une protéine, à cause de la redondance du code génétique (le nouveau triplet code le même acide aminé que le triplet original), ou parce qu'elle touche une région non codante de l'ADN, ou un intron.

⊕ *Mutations par insertions ou délétions :*

Les insertions et les délétions sont des mutations décalantes, et sont les deux types de mutations dites indel ou frame-schift. Une addition ou une supression de nucléotides non multiple de 3 provoquera un changement de cadre de lecture du code génétique au moment de la traduction, cela générera le plus souvent une protéine tronquée par l'apparition d'un codon-stop prématuré.

b - Mutations chromosomiques ou anomalies chromosomiques : Ces mutations sont observables lorsqu'on fait un caryotype : duplication, translocation, inversion, insersion. Il peut s'agir aussi d'une perte ou d'un gain de chromosomes : trisomie, monosomie ou polyploïdie.

1 - 2 - Mutations et génétiques des populations :

Les mutations expliquent l'existance d'une varibilité entre les gènes. Les mutations qui sont les moins favorables (délétères) à la survie de l'individu qui les porte, sont éliminées par le jeu de la sélection naturelle, alors que les mutations avantageuses, beaucoup plus rares, tendent à s'accumuler. La plupart des mutations sont dites neutres, elles n'influences pas la valeur sélective et peuvent se fixer ou disparaître par le jeu de dérive génétique. Les mutations spontanées, généralement rares et aléatoires, constitue donc la principale source de divércité génétique, moteur de l'évolution.

2 - La sélection naturelle:

En fonction des conditions du milieu, les individus d'une population peuvent être en concurence et donc avoir une survie différente. les individus les mieux adaptés vont donc être plus nombreux dans la génération suivante, et donc la fréquence des allèles avantageux va augmenter. En effet :

- Si un phénotype confère aux individus qui le portent un avantage, ils survivent mieux et en potentillement plus de descendants. Leurs allèles ont tendance à ce répondre dans la ppopulation-sélection dite positive.

A chaque génération, des individus (des phénotypes) sont favorisés ; ceux qui sont mieux adaptés au conditions du milieu ; on a donc une évolution non aléatoire de la population.

La sélection naturelle entraîne une évolution rapide : un faible nombre de générations suffit pour que varie la structure génétique d'une population.

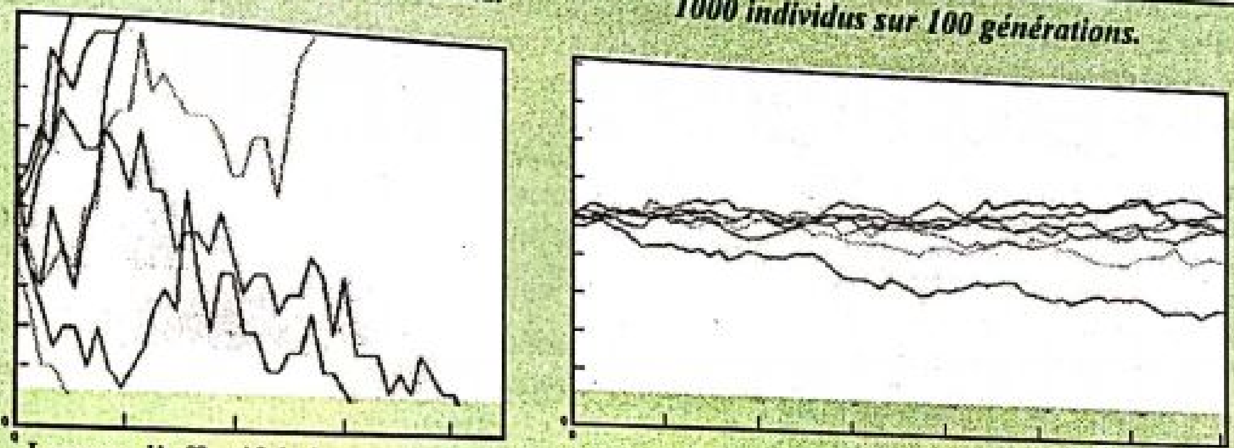
3 - La dérive génétique :

une variation aléatoire de la fréquence des allèles neutres.

Un allèle neutre est un allèle ne conférant au phénotype codé ni avantage, ni désavantage. (Il apparaît par mutation, au hasard, dans la population)

Les modélisations effectuées nous montrent que pour un allèle dont la fréquence à un instant t est de 0,5 :

50 individus sur 100 générations. ***1000 individus sur 100 générations.***



Lorsque l'effectif de la population est faible, la probalité de perdre (0%) ou de fixer l'allèle (100%) est importante.

Lorsque l'effectif augmente, cette probabilité diminue et la fréqence de l'allèle a plus de chance de se maintenir dans une fourchette autour de sa fréquence initiale.

L'évolution de la structure génétique des populations est soumise au hasard pour les allèles non sélectifs. dans un cadre temporel. on parle de dérive génétique, qui aboutit à une réduction du polymophisme génétique et se produit d'autant plus rapidement que la taille de la population est petite.

Les deux causes importantes de la dérive génique sont les goulets d'étranglement et les éffets fondateurs.

+ Goulets d'étranglement. Même les organismes constituant normalement de vastes populations sont susceptibles de traverser occasionnelement des périodes durant lequelles seul un petit nombre de la population mère, pris au hasard transmis ces allèles aux déscendants et forme donc une communauté réduite ne possède pas tous les allèles de la population mère.

Etant réduite, elle subit une DERIVE génétique : perte au fil des générations des allèles les moins fréquents.

+ Effet fondateur : est un autre aspect de tirage aléatoire des allèles pour former une nouvelle population. Quelques groupes de migrants d'une population d'origine. En raison de la taille réduite de ces groupes, leur commposition génétique peut différer fortement de celle de la population d'origine. Cette variation d'échantillonage, induite par la scission de population suite à des migrations réduites est appelée effet fondateur (fixation d'un allèle au seint d'un groupe migrant).

SVT

4 - La migration

L'échange d'individus (ou de gamètres) entre sous populations permet les flux de gène.

Le modèle en îles (ou model de l'archipel) considère que la migration s'éffectue entre les sous populations (dèmes) d'une population subdivisée.

Si le nombre de dèmes est suffisament grand (infini), la fréquence des allèles parmi les migrants est constante en l'abscence d'autres forces évolutives, la migration homogénéise complètement les fréquences alléliques entre dèmes.

En génétique des populations, le flux génétique, aussi nomé flux de gènes ou migration des gènes, correspondent à l'échange de gèns ou de leurs allèles entre différentes populations apparentées en raison de la migration d'individus fertiles ou de leurs gamètes. Les flux géniques ont généralement lieu au sein d'une même éspèce, bien que différents exemples de flux de gènes interspéctifiques existent. Dans tous ces cas, ils joue un rôle majeur dans l'organisation spatiale de la diversité génétique et représentent à ce titre une force évolutive importante.

Comme les allèles s'échangent entre les populations, le flux génétique tend à réduire les différences génétiques entre les populations ; c'est-à-dire à homogéinéiser les fréquences allèliques entre les populations : plus le flux de gènes entre deux populations est important, plus les populations sont similaires (même allèles présents, mêmes fréquences alléliques). On dit qu'elles sont peu différenciées. En fait s'il est assez important il peut fondre deux populations pour n'en faire qu'une, avec un seul et même patrimoine génétique. L'impact des flux génétiques au sein d'une population est globalement le même qu'entre différentes populations.

SVT

5 - La définition d'une éspèce

La diversité des éspèces est une des composantes de la biodiversité. On peut rattacher les individus à une espèce selon différents critères.

Selon le critère de ressemblance, deux individus sont de la même espèce s'ils se ressemblent. A ce critère, correspond une définition typologie de l'espèce : un individu appartient à une espèce s'il ressemble au type de cette espèce (individu de réfférence décrit scientifiquement et consérvée dans un musée).

Selon le critère d'interfécondité, deux individus sont de la même espèce s'il peuvent se reproduire entre eux et avoir une descedance fertile. A ce critère, correspond la définition biologiquede l'espèce, plus rigoureuse au plan évolutif : une espèce est définie par un isolement reproducteur.

La définition de l'espèce a varié au cours de l'histoire de la biologie. Aujourd'hui, la définition la plus couramment employée est la suivante : une espèce peut être considérée comme un ensemble d'individus siffisamment isolés génétiquement des autres populations.

Ces critères d'isolement peuvent être multiples : incapacité à s'accoupler suite à des différences dans les parades nuptiales, incompatibilité des pieds génitales et isolements géographiques ne sont que quelques exemples.

Conclusion :

Une population est constituée d'individus de la même espèce qui ne possèdent pas les mêmes combinaisons d'allèles des différents gènes constituant leur génome. On observe donc une diversité génétique à l'intérieur des populations. Différents facteurs modifient cette diversité au cours des générations.

La fréquence d' allèlesdont la présence est sans conséquence sur la fertilité et la survie des individus varie d'une génération à l'autre sous le seul effet du hasard. C'est la dérive génétique Lors d'une migration, le hasard joue aussi un rôle dans la modification des populations : les émigrants emportant un échantillon aléatoire des allèles de la population initiale, la fréquence des allèles dans la nouvelle population ne sera pas la même que dans la population de départ. Cette forme particulière de dérive génétique et qualifiée d' effet fondateur

A un instant donné, les individus d'une population ont une survie et une fertilité différente selon les conditions du milieu (accès aux ressources alimentaires, compétition avec d'autres espèces, etc ..). Ceux dont le phénotype est favorisé ont un plus grand nombre de déscendants et la fréquence des allèles qu'ils portent augmentera la génération suivante. C'est le mécanisme de sélection naturelle

Hasard et sélection naturelle agisse simultanément sur la transformation des populaires. Ce sont deux mécanismes à l'origine de modifications de la diversité génétique et phénotypique des populations au cours de génération. On appelle évolution biologiqueces modifications des populations.

Questions d'évaluation des connaissances

I - Définir les notions suivantes :

Information génétique – ADN – Le chromosome – La mitose - Le cycle cellulaire – La mutation – La transcription – La traduction – ARN polymérase – Le génie génétique – L'Enzyme de restriction – Le plasmide – La méiose – Le brassage interchromosomique – Le brassage intrachtomosomique – La race pure – Le croisement test – La carte factorielle - L'anomalie chromosomique.

II - Sous forme de tableau comparer entre :

1 -Mitose d'une cellule animale et d'une cellule végétale .
2 -Nucleosome et nucléotide.
3 - Mitose et la méiose.
4 -Anaphase, Anaphase I , Anaphase II.
5 -A D N et A R N m.

III - Déterminer les propositions justes et celles qui sont fausses :

1 -La nature de la substance génétique est proteinique
2 -Les chromosomes ne sont formés que par de l' ADN
3 -La mutation est un changement au niveau de la séquence peptidique.
4 -Le codon est un triplet de nucléotide codant toujours pour un acide amine.
5 -Au cours de l'anaphase il y a ségrégation et séparation des chromatides.
6 -La migration polaire place ces chromosomes au niveau de la plaque équatoriale
7 -Pendant l'interphase, l'ADN se dédouble selon le modèle semi-conservatrice.
8 -Au niveau des yeux de réplication, il y a polymérisation des acides aminés.
9 -La mitose forme deux cellules filles génétiquement identiques.
10 -La mutation de substitution est toujours le changement de la base azotée A par T.
11 -La délétion est une perte d'un ou plusieurs nucléotides.
12 -La conséquence d'une nutation est toujours la formation d'une protéine modifiée anormale.
13 -La transcription a lieu dans le noyau par l' ARN polymérase.
14 -La transcription est la formation d'une protéine à partir de l'ADN.
15 -Le chromosome est formé de deux chromatides.
16 -Lors de la duplication d'ADN, l'élongation se fait dans le sens 3' → 5' d'une façon continu.

Scanné avec CamScanner

17 - Le déclenchement de la transcription de l'ADN en ARN exige des segments d'ARN initiateurs.
18 - La synthèse d'une protéine commence toujours par l'intégration de l'acide aminé Méthionine.
19 - La mitose est une division conforme.
20 - La méiose réduit la quantité d'ADN
21 -La réduction de la quantité d'ADN se fait pendant l'anaphase 1.
22 - Le brassage intrachromosomique se fait pendant l'anaphase 1 .
23 - La fécondation diversifie l'information génétique par brassage intrachromosomique .
24 - La méiose contribue à la formation des gamètes.
25 - La migration indépendante des allèles a lieu pendant la prophase I .
26 - La fécondation restitue la diploïdie .
27 - La méiose donne quatre cellules haploïdes génétiquement identiques.
28 - Le génie génétique est une technique de transfert de gènes ayant des caractères utiles.
29 - La plasmide est un ADN circulaire.
30 - La transcription inverse permet d'isoler un gène à partir d'un ADN .
31 - Le caryotype et un ensemble de chromosomes ayant la même position du centromère.
32 - Pour isoler un gène utile , on utilisé une enzyme de restriction spécifique.
33 - L'étude des caryotypes permet de détecter les anomalies chromosomiques.
34 - L'anomalie chromosomique est due toujours à un chromosome en plus ou en moins.

IV - Q. C. M : Déterminer la (ou les) réponses juste pour chaque proposition :

1 - L'information génétique :

a - Est localisée dans le cytoplasme.
b - Est différente chez les membres de la même famille.
c - Est distribuée d'une façon inégale pendant la mitose.
d - Est un programme génétique responsable des caractères caractéristiques d'un individu donné.

2 - La nature de l'information génétique chez l'Homme est :

a - ADN.
b - Protéines.
c - Bases azotées.
d - Acide phosphorique.

3 - Les chromosomes :

a - Sont le support du transfert de l'information génétique d'une cellule à une autre.
b - Sont formé d'ADN et les protéines d'histones.
c - Sont constituée d'ADN et de phospholipides.
d - Sont formé d'une séquence nucléotidique.

4 - La mitose :

a - Sa première phase est caractérisée par la disparition du nucléole et l'apparition de la membrane nucléaire.

Scanné avec CamScanner

b - Est un phénomène qui a lieu à travers quatre étapes donnant quatre cellules diploïdes.

c - Transfert l'information génétique à deux cellules filles.

d - Maintient l'information génétique d'une cellule à une autre.

5 - La molécule d'ADN :

a - Est formé d'un seul brin.

b - Est formée de deux brins ayant la même polarité.

c - Est une séquence de quatre nucléotides différents.

d - Est une molécule sous forme d'une double hélice.

6 - La duplication d'ADN :

a - Est catalysée par l'ARN polymérase.

b - A lieu au niveau de plusieurs sites au même temps.

c - Se fait selon un mode semi-conservatif.

d - Se fait selon un mode conservatif.

7- La transcription d'ADN :

a - Exige l'ADN polymérase et l'ARN polymérase.

b - Copie toute la molécule d'ADN sous forme d'ARN.

c - A lieu au niveau du noyau et des ribosomes.

d - Est une copie du gène au niveau du noyau

8 - Le gène :

a - Est séquence nucléotidique codant pour une séquence peptidique dans la cellule.

b - Est une séquence nucléotidique codant pour plusieurs séquences peptidiques.

c - Est un morceau d'ADN contrôlant un caractère génétique donné.

d - Est l'ensemble des molécules d'ADN de tous les chromosomes de la cellule.

9 - Le codon :

a - Est un triplet de nucléotides d'A R N t.

b - Est un triplet de nucléotides d'A R N r.

c - Est un triplet de nucléotides d'A R N m.

d - Est un triplet de nucléotides codant toujours pour un acide aminé.

10 - La traduction est une opération :

a - Consistant à former une séquence d'acides aminés à partir d'une séquence nucléotidique au niveau du noyau.

b - Transformant les codons d'A R N m en une séquence peptidique par intervention des ribosomes.

c - Qui a lieu dans le cytoplasme selon trois phases : Initiation, Elongation et terminaison.

d - Qui déchiffre les codes d'A R N m par intervention de l'A R N t les ribosomes.

11- La mutation :

a - Change toujours le phénotype de l'individu.

b - Conduit toujours à l'apparition de maladies héréditaires.

c - Est un changement d'au moins un nucléotide.

SVT

Scanné avec CamScanner

d -Est toujours silencieuse.

12 - La mutation de substitution :

a -Ne change pas la séquence nucléotidique d' A R N m.

b -Conduit toujours à un changement de la séquence peptidique.

c -Est toujours héréditaire.

d -Change la fonction de la protéine.

13 -La mutation d'addition :

a -Change toujours la séquence nucléotidique d' A R N m.

b -Conduit toujours à la formation d'une protéine non fonctionnelle.

c -Est toujours héréditaire.

d -Ne change pas la séquence nucléotidique de la protéine.

14 -La mutation de délétion :

a -Est toujours sans effet.

b -Forme une protéine normale ou non fonctionnelle.

c -Forme une protéine différente de la protéine d'origine.

d -Na cause pas de changement du caractère héréditaire.

15 -La méiose :

a -Est un phénomène conduisant à la formation de quatre cellules haploïdes.

b -Maintient la transmission de l'information génétique d'une génération à une autre.

c -Contribue à la diversification des gamétes.

d -Concerne toutes les cellules de corps.

16 -L'anaphase I se caractérise par :

a -La séparation des deux chromatides par ségrégation du centromère.

b -La migration des chromosomes homologues vers deux pôles opposés.

c -La réduction de la quantité d'ADN.

d -La formation de tétrades au niveau de la plaque au niveau de la plaque équatoriale.

17 -Pendant la prophase I on assiste à :

a -Un brassage interchromosomique.

b -Un brassage intrachtomosomique.

c -La séparation des tétrades.

d -La formation des tétrades.

18 -Pendant l'anaphase II :

a -Les chromosomes homologues se séparent.

b -Les chromosomes forment une plaque équatoriale.

c -Dégradation du centromère et séparation des deux chromatides.

d -Les filaments chromosomiques se contractent.

19 -Le brassage intrachromosomique :

a -Est un brassage des allèles.

Scanné avec CamScanner

b - Est le phénomène du crossing-over.

c - A lieu pendant la métaphase II.

d - Est un échange de fragments chromosomiques entre les chromosomes homologues.

20 - Le brassage interchromosomique :

a - Diversifie l'information génétique.

b - A lieu pendant l'anaphase II.

c - Est une séparation puis une migration anarchique des chromosomes homologues.

d - A lieu pendant la mitose.

21 - La fécondation :

a - Conduit à la formation des gamètes.

b - Approfondit le brassage des allèles.

c - Restitue la diploïdie.

d - Contribue dans la séparation des allèles.

22 - Deux gènes liés peuvent :

a - Être portés par deux chromosomes différents.

b - Être portés par un chromosome sexuel.

c - Se séparer pendant la méiose.

d - Se transmettre liés pendant la méiose.

23 - Les gènes indépendants :

a - Sont portés par deux chromosomes différents.

b - Peuvent être échangés par le chrossing-over.

c - Sont portés par des chromosomes homologues.

d - Peuvent être échangés par brassage interchromosomique.

24 - L'individu à phénotype récessif :

a - Est homozygote pour le caractère concerné.

b - Est hétérozygote pour le caractère concerné.

c - Produit un seul type de gamètes.

d - Produit plusieurs types de gamètes.

25 - Les chromosomes sexuels X Y chez l'Homme :

a - Ont la même taille.

b - N'ont aucune relation avec les maladies héréditaires.

c - Ne sont jamais affectés par les anomalies chromosomiques.

d - Ont la même fonction.

26 - La maladie de Down, résulte de :

a - La non séparation des chromosomes sexuels pendant la formation des gamètes.

b - La non séparation des chromosomes 21 homologues chez l'un des deux parents pendant la gamétogénèse.

c - L'anomalie du nombre de chromosomes autosomales.

Scanné avec CamScanner

d - L'addition d'un chromosome sexuel X.

27 - Dans le cas d'un individu hétérozygote pour deux allèles codominants :

a - Seul l'allèle récessif s'exprime.

b - Seul l'allèle dominant s'exprime.

c - Les spermatozoïdes portent les deux allèles au même temps.

d - L'expression des deux allèles donne un caractère intermédiaire.

28 - Les proportions phénotypiques 9/16, 3/16, 3/16 et 1/16 :

a - Prouvent la liaison de deux gènes.

b - Prouvent l'indépendance de deux gènes.

c - Prouvent que les deux gènes sont liés au sexe.

d - Sont les résultats d'un croisement test.

29 - Dans le cas de la dominance absolue entre deux allèles :

a - Le croisement entre deux races pures donne une génération F1 composée de deux phénotypes différents.

b - Le croisement entre deux races pures donne une génération F_1 homogène.

c - Le croisement entre deux hybrides donne une génération ayant un phénotype intermédiaire entre ceux des deux parents.

d - Le croisement entre un hybride et une race pure donne une génération composée de 75% d'individus de phénotype dominant et 25% du phénotype récessif.

30 - Dans le cas de gène lié au sexe :

a - L'allèle est toujours porté par le chromosome Y.

b - Le gène porté sur le chromosome Y ne s'exprime que dans le cas de dominance totale.

c - Il est probable qu'une mère saine hétérozygote donne naissance à 50% des enfants malades.

d - Le gène responsable d'une maladie qui n'atteint que les mâles est surement porté par le chromosome X.

31 - Le brassage intrachromosomique :

a - A lieu pendant l'anaphase I.

b - Permet de brassage des allèles portés par les chromosomes homologues.

c - A lieu pendant l'anaphase II.

d - Permet le brassage des allèles portés par des chromosomes non homologues.

32 - Le syndrome de Klinefelter est caractérisé chez l'Homme par un caryotype formé de :

a - 44 autosomes et 3 chromosomes sexuels 2X et 1Y.

b - 44 autosomes et un chromosome sexuel X.

c - 45 autosomes et 3 chromosomes sexuels.

d - 44 autosomes et 3 chromosomes sexuels 2Y et 1X.

Scanné avec CamScanner

Réponses

I- Définitions :

1 - L'information génétique est un programme porté par la molécule d'ADN contrôlant les caractères génétiques chez tous les êtres vivants.

2 - L'ADN est une molécule formé d'une double hélice constitué d'une séquence de nucléotides.

3 - Les chromosomes sont des filaments nucléaires (ADN) entourés autour de protéines appelées histones et qui apparaissent pendant la division cellulaire.

4 - La mitose est une division conforme conduisant à la formation de deux cellules filles génétiquement identiques entre elles et à la cellule mère.

5 - Le cycle cellulaire est l'ensemble des transformations que connait la cellule pendant la période s'étalant depuis le début de l'interphase au début de l'interphase suivante.

6 - La mutation est une variation imprévisible, brutale de la succession nucléotidique. Elle peut être soit une substitution, une délétion ou insertion.

7 - La transcription est un phénomène qui a lieu dans le noyau consistant à la formation de l'A R N m à partir de l'un des deux brins d'ADN.

8 - La traduction est un phénomène qui a lieu dans le cytoplasme consistant à former une protéine à partir de l'A R N m.

9 - L'ARN polymérase est une enzyme responsable de la polymérisation des nucléotides formant l'A R N m à partir d'un gène situé sur l'un des deux brins d'ADN.

10 - Le génie génétique est un ensemble de techniques consistant à isoler un gène puis l'insérer dans l'ADN d'une autre cellule qui sera capable d'acquérir un nouveau caractère génétique.

11 - L'enzyme de restriction est une enzyme dont le rôle est de couper la molécule d'ADN a des sites bien précis.

12 - Le plasmide est un ADN circulaire porté par certaines bactéries et capable de transférer un gène d'une cellule à une autre.

13 - La méiose est une division cellulaire consistant à former quatre cellules haploïdes à partir d'une cellule mère diploïde.

14 - Le brassage interchromosomique est un phénomène qui a lieu pendant l'anaphase I de la méiose et consistant à une séparation puis une migration des chromosomes d'une façon aléatoire vers les deux pôles de la cellule formant ainsi des gamètes de type parental et des gamètes de type recombiné avec les mêmes proportions.

15 - Le brassage intrachromosomique est un phénomène cellulaire qui a lieu pendant l'anaphase I de la méiose et consistant à un échange de fragments chromosomiques entre le chromosome et son homologue.

16 - La race pure est un individu homozygote dont le génotype est formé par le même allèle pour un caractère génétique donné.

SVT

Scanné avec CamScanner

17 - Le croisement test est un croisement réalisé entre un individu de génotype inconnu et de phénotype dominant récessif ; dont le but est de déterminer le génotype inconnu en se basant sur les proportions des phénotypes obtenus.

18 - La carte factorielle est une représentation de la position relative des gènes sur un chromosome en précisant la distance séparant les deux gênes, en centimorgan.

19 - L'anomalie chromosomique est toute variation du nombre ou la structure des chromosomes.

II - Les comparaisons :

SVT

1 - Entre mitose animale et mitose végétale :

Mitose animale	Mitose végétale
4 Phases	4 Phases
Forme deux cellules identiques	Forme deux cellules identiques
Maintient l'information génétique	Maintient l'information génétique
Présence de deux asters aux pôles cellules	Présence de calotte polaire
La séparation des deux cellules se fait par étranglement équatoriale	La séparation des cellules filles se fait par formation d'une membrane cellulaire

2 - Entre nucléosome et nucléotide :

Nucléotide	Nucléosome
Unité de structure de l'ADN et l'ARN	Unité de structure des filaments chromosomiques
Formé d'un acide phosphorique relié à sucre à C_5 lui-même relié à une base azotée	Formé d'une fragment d'ADN enroulé sur une protéine appelée Histone

3 - Entre la mitose et la méiose :

Mitose	Méiose
Une cellule (2n) mère donne 2 cellules filles (2n)	Une cellule 2n mère donne 4 cellules filles (n)
Se déroule en 4 phases	Se déroules en 8 phases
Maintient l'information génétique.	Diversifie l'information génétique
Assure la croissance et le renouvellement des cellules mortes	Assure la formation des gamètes.

4 - Entre l'anaphase, l'anaphase I et l'anaphase II :

Scanné avec CamScanner

Anaphase	Anaphase I	Anaphase II
Est une phase de la mitose	Est une phase de la division réductionnelle	Est une phase de la division équationnelle
Migration des chromatides après ségrégation des centromères	Migration des chromosomes sans ségrégation des centromères	Migration des chromatides après ségrégation des centromères
Réduction de la quantité d'ADN	Réduction de la quantité d'ADN	Réduction de la quantité d'ADN

5 - Entre ADN et A R N m :

ADN		ARNm
Formé de deux brins		Formé d'un seul brin
Constituants	Acide phosphorique, désoxyribose Bases : A, G, C et T	Acide phosphorique, Ribose Bases : A, G, C et U
Longue durée de vie		Courte durée de vie
Masse moléculaire élevé		Masse moléculaire faible

III - Les propositions justes et les propositions fausses :

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Réponses	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V

Questions	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Réponses	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	F

Questions	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Réponses	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F

IV - Q.C.M :

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Réponses	b,d	a	a,b	b,c,d	c,d	b,c	d	a,c	c	b,c,d	c

Questions	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Réponses	c	a,c	c	a,c	b,d	b,d	c,d	a,b,d	a,c	b,c	b,d

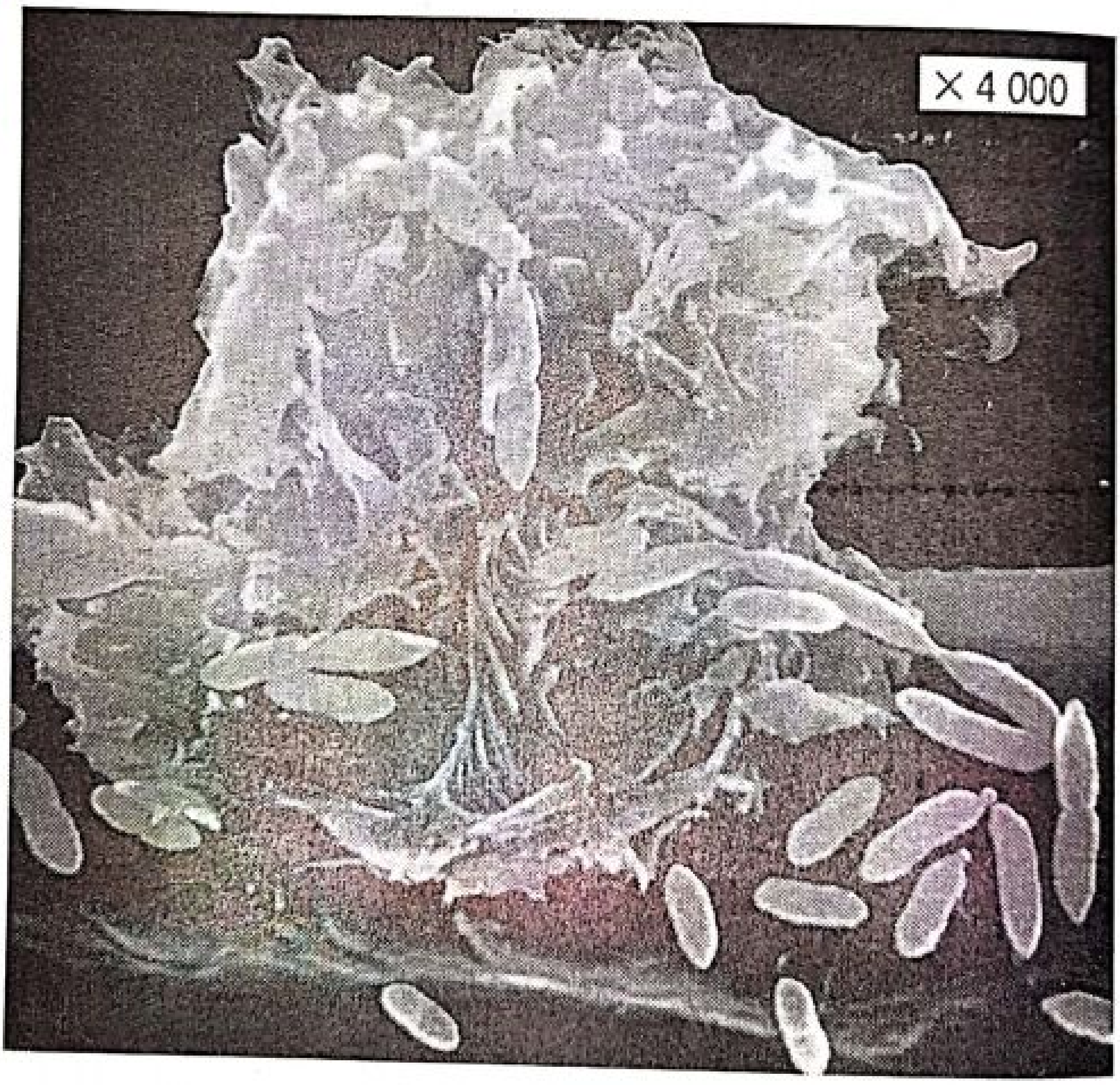
Questions	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Réponses	a,d	a,c	aucune	b,c	d	b	c	b	b	a

SVT

SVT

Unité n° 5

LE SYSTÈME IMMUNITAIRE



L'essentiel du cours

Le système immunitaire d'un organisme est un système biologique constitué d'un ensemble coordonné d'éléments de reconnaissance et de défense qui déscrimine le soi du non soi. Il est hérité dès la naissance, mais autonome, adaptatif et doué d'une grande plasticité.

Comment ce système réussit à présérver le soi et éliminer le non soi.

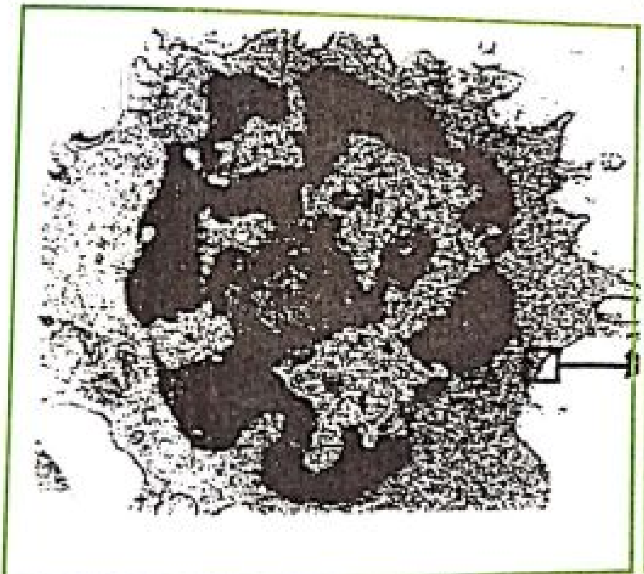
Chapitre 1 La déscrimination entre le soi et le non soi.

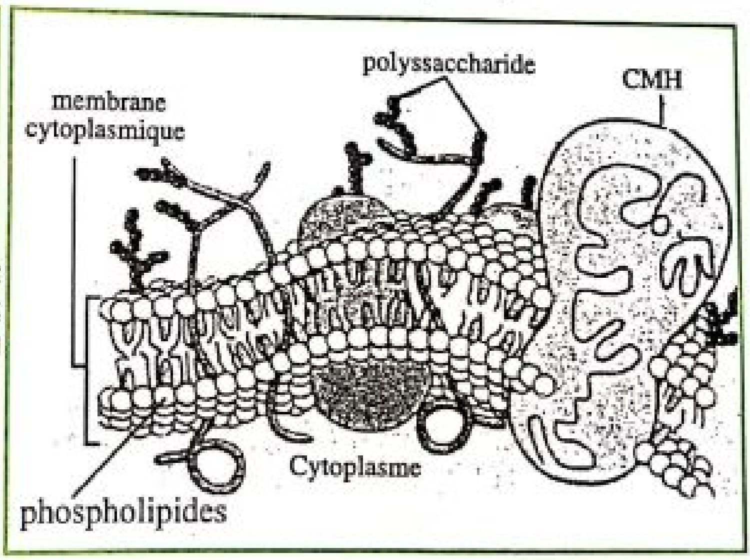
I - Définition du soi et du non soi :

Le soi correspond à l'ensemble des molécules résultant de l'expréssion des gènes d'un individu.
Le non soi correspond à l'ensemble des molécules dont la synthèse ne résulte pas de l'information génétique propre à l'organisme et qui déclenchent une réaction immunitaire.

II - Les marqueurs majeurs du soi :

Toutes les cellules de l'organisme possèdent sur leurs surfaces des glycoprotéines spécifiques à chaque individu, elles constituent des marqueurs du soi, d'ordre majeur. Les chaines polypeptidiques qui constituent ces molecules sont l'expréssion des gènes existants sous forme de nombreux allèles sur le chromosome 6. Ces gènes constituent le complexe majeur d'hisocompatibilité (CMH).





On distingue deux classes de CMH :
Le CMH de la classe I porté par toutes les cellules nucléées de l'organisme à l'exception de quelques cellules comme les neurones, les cellules de la cornée ou les glandes salivaires.
le CMH II porté par quelques cellules du système immunitaire.

III - marqueurs mineurs du soi.

Ce sont des marqueurs sanguins sous forme de glicolipides portés par la membrane des globules rouges du sang. Il existe deux types de marqueurs : marqueurs de type A et des marqueurs de type B et sont le résultat de l'expréssion d'un gène porté par le chromosome 9.

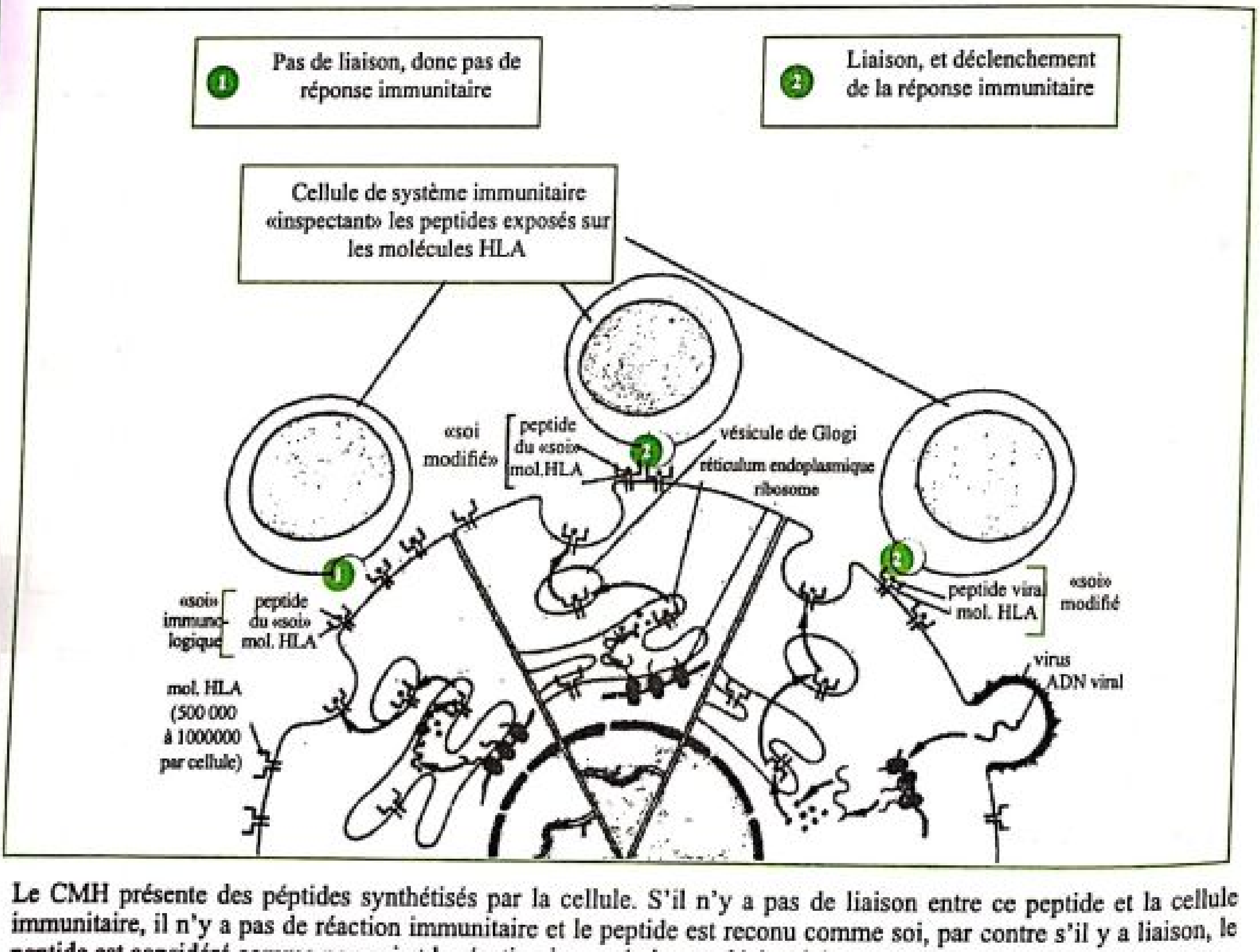
SVT

Scanné avec CamScanner

	A	B	AB	O
Sur les hématies	 agglutinogène A	 agglutinogène B	 agglutinogènes A et B	 pas d'agglutinogène
Dans le plasma	agglutinine anti-B	agglutinine anti-A	pas d' agglutinine	agglutinine anti-A agglutinine anti-B

Lors des transfusions sanguines, il faut éviter que le receveur aie des agglutinines (anticorps) compatibles avec les agglutinogènes (marqueur) des globules rouges du donneur.

III - Role du CMH dans le déclenchement de la réaction immunitaire.



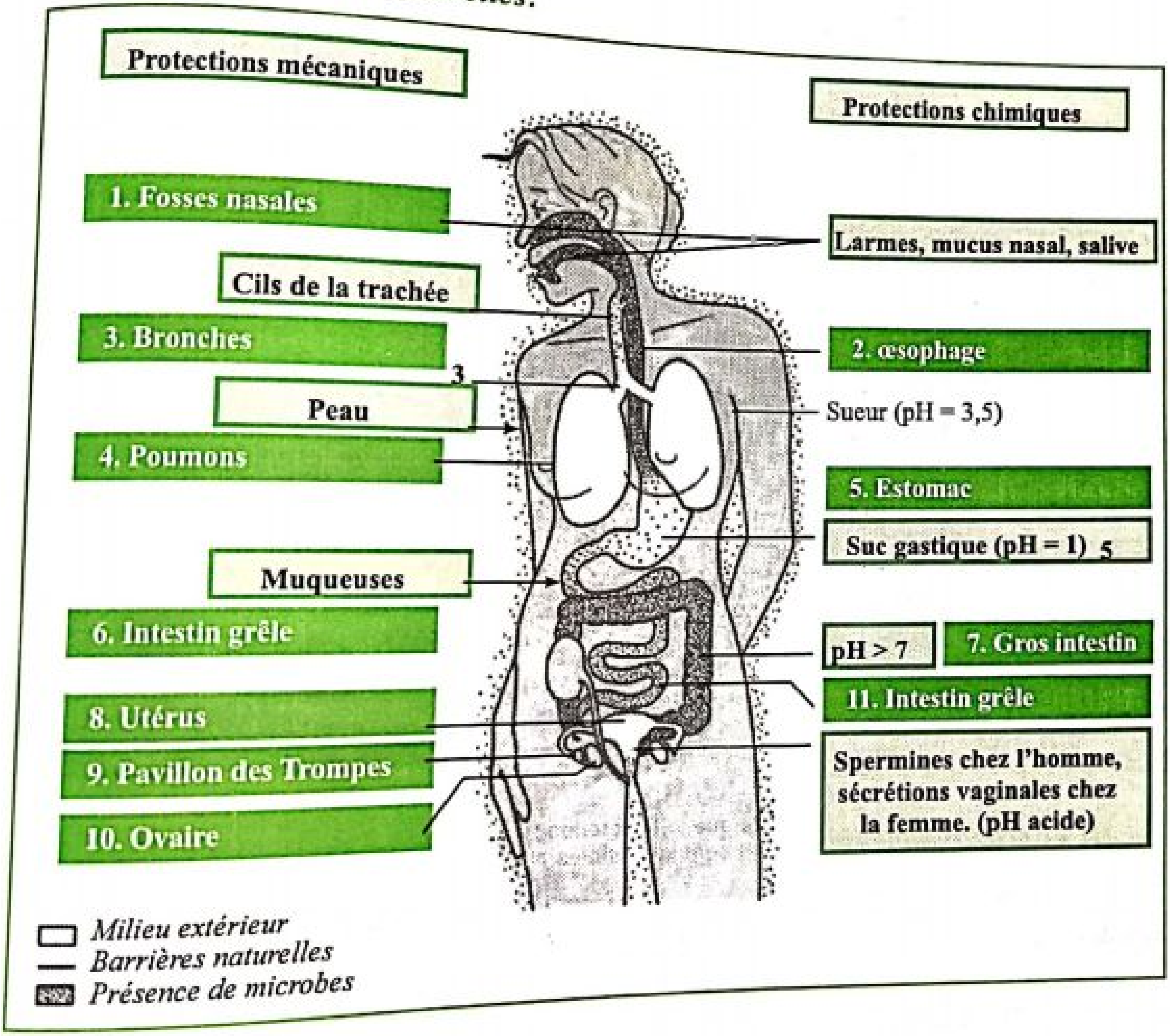
Le CMH présente des péptides synthétisés par la cellule. S'il n'y a pas de liaison entre ce peptide et la cellule immunitaire, il n'y a pas de réaction immunitaire et le peptide est reconu comme soi, par contre s'il y a liaison, le peptide est considéré comme non soi et la réaction immunitaire est déclenchée.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 2 La réponse immunitaire non spécifique .

La réponse immunitare non spécifique constitue l'immunité innée qui agit sans tenir compte de la nature du non soi qu'elle combat. Elle constitue la première lignée de défense face à une infection. Plusieurs types de mécaismes interviennent au cours de cette réponse.

I - Les barrières naturelles.



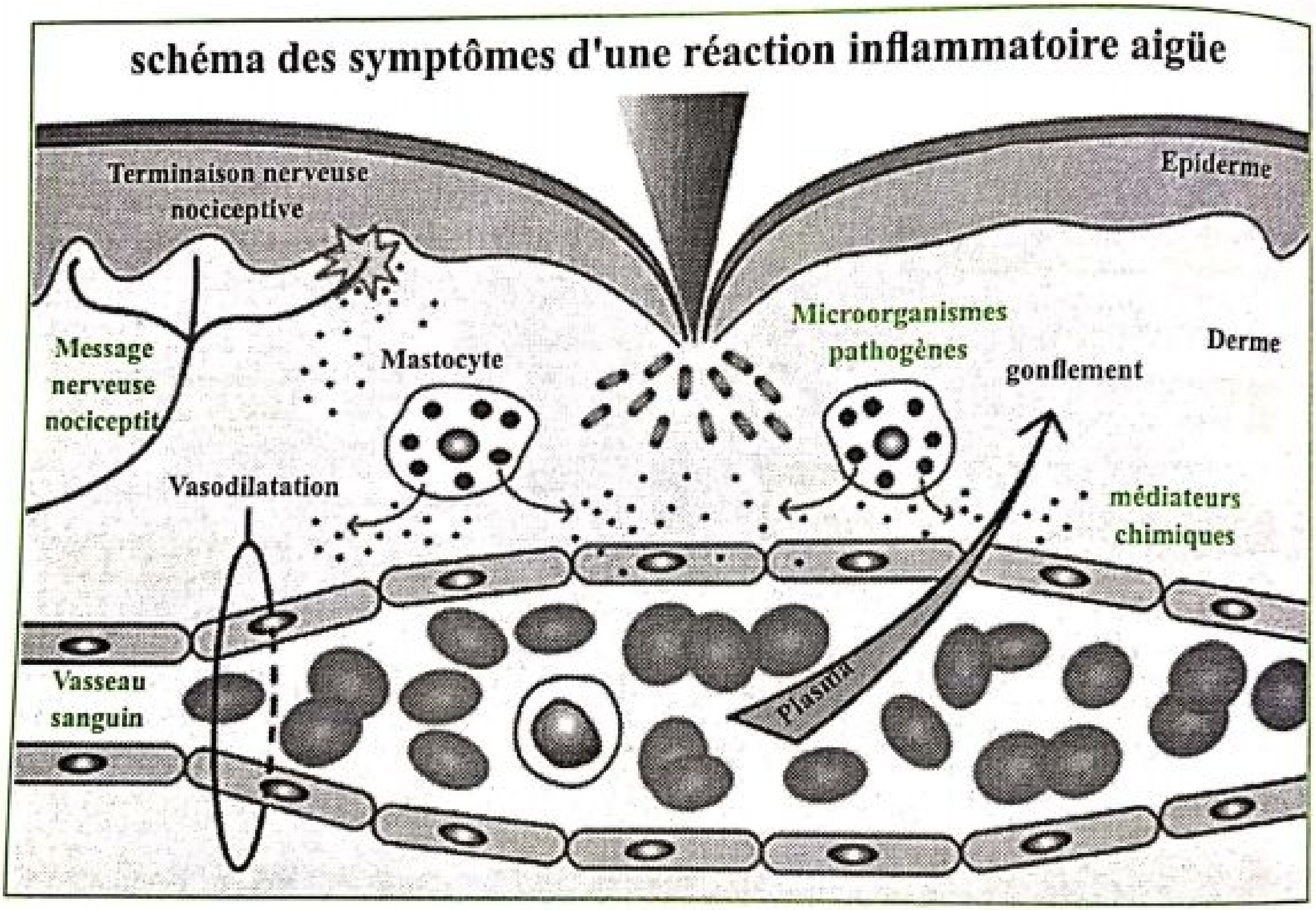
On distingues trois types de barrière :

* barrieres mécaniques comme la peau, les muqueuses oro-pharyngiènnes et résspiratoires.
* barrières biochimiques: sueur, larmes et suc gastrique.
* barrières écologiques représentés par la flore bactériènne qui nous protège par concurence avec les micro-organismes pathogènes.

Scanné avec CamScanner

II - Réaction inflammatoire :

Cette réaction donne des symptomes causés par la libération de médiateurs chimiques. C'est l'histamine qui constitue l'élément le plus actif de l'inflammation et libéré par les mastocystes; situés dans le tissu conjonctif. Il provoque la dilation des vaisseaux. Les quatres signes de l'inflammation sont la rougeur, la douleur, la chaleur et le gonflement.



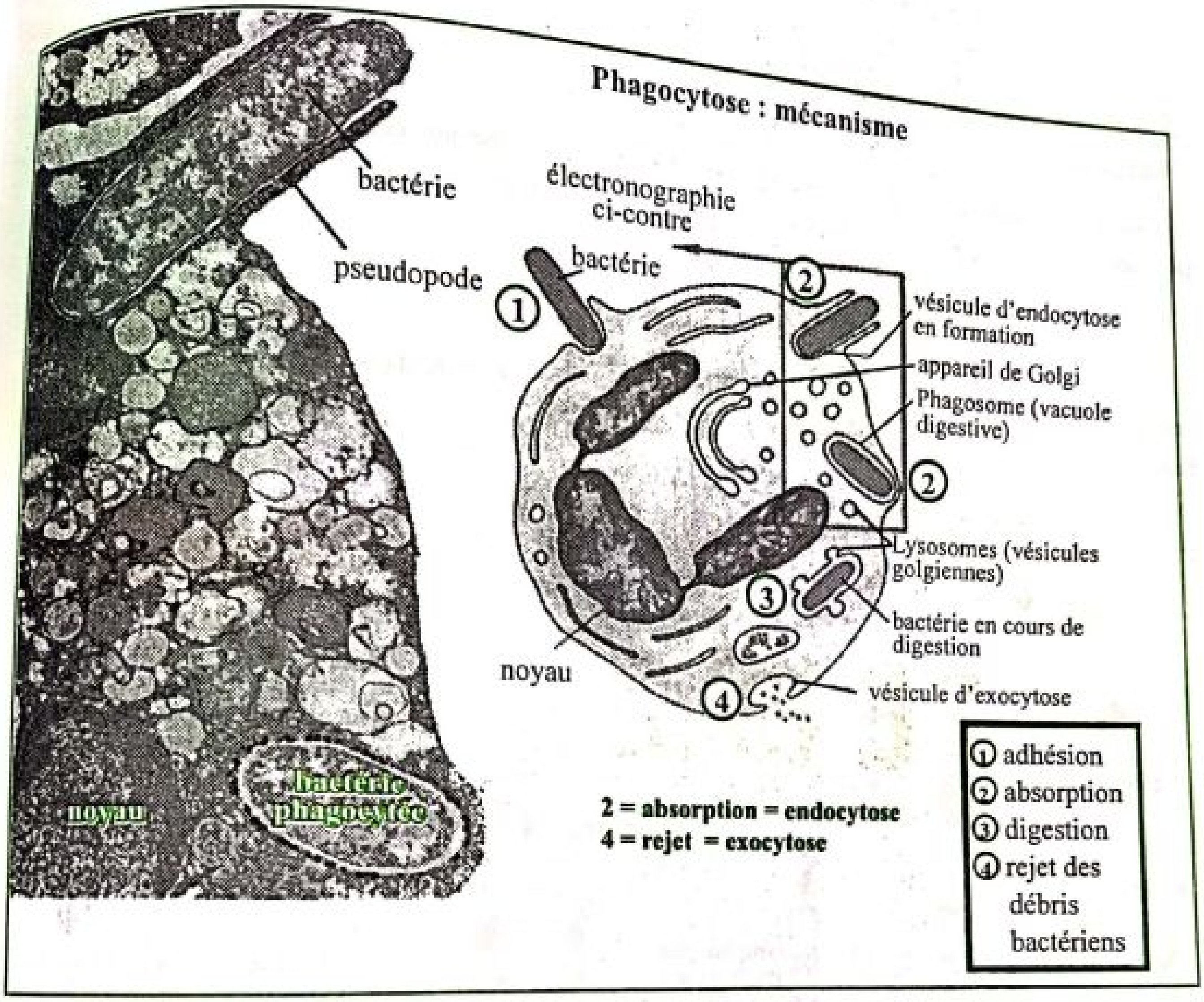
III - Facteurs sanguins :

C'est surtout le facteur complément qui constitue un ensemble de protéines qui agit en cascade protéolytique. Il se situe dans le plasma sanguin et joue trois rôles principaux :

- Faciliter la phagocytose.
- Eliminer les corps étrangés par formation du complexe d'attaque membranaire.
- Chimiotactisme : attraction des leucocytes vers le lieu de l'infection.

Scanné avec CamScanner

IV - La phagocytose :



C'ent un phénomène cellulaire par lequel certaines cellules appelées phagocytes peuvent ingérer et détruire des particulrs étrangères.

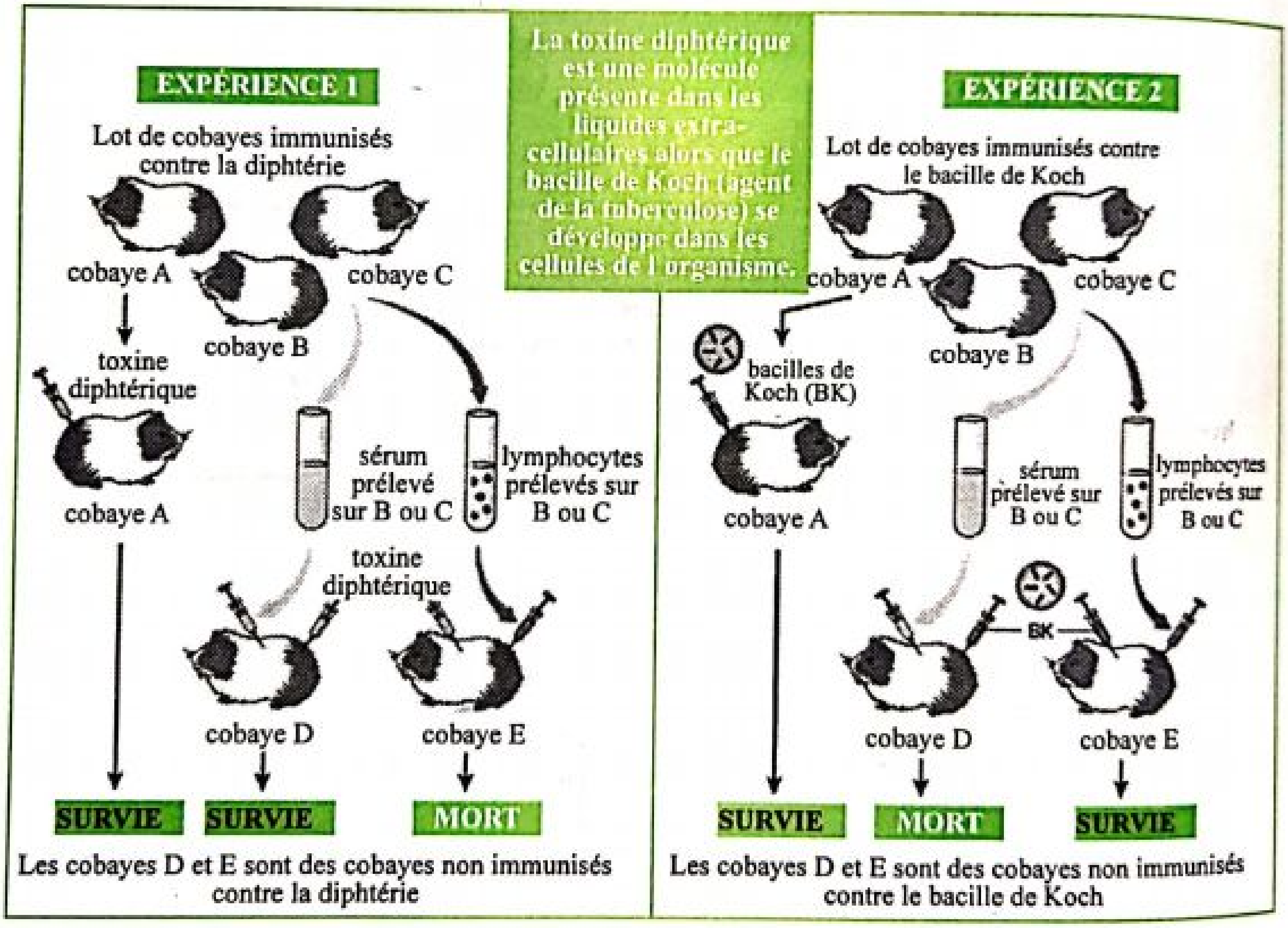
Scanné avec CamScanner

Chapitre 3 La réponse immunitaire spécifique .

L'immunité spécifique appelée également immunité acquise est une immunité dirigée contre un agresseur particulier et qui met en jeu des cellules et des molécules capables de différencier les antigènes et de les éliminer.

I - Mise en évidence des deux types d'immunité spécifique.

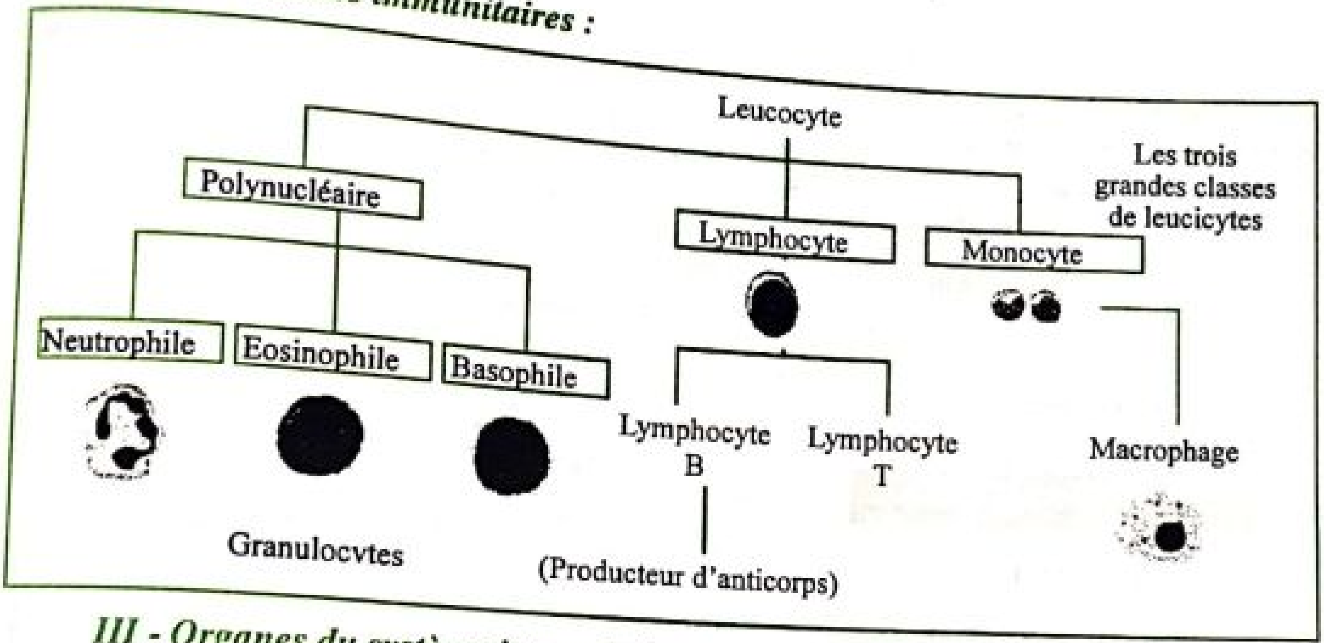
Les deux types d'immunité spécifique diffèrent par les éléments intervenant dans la réaction immunitaire pour éliminer l'antigène.



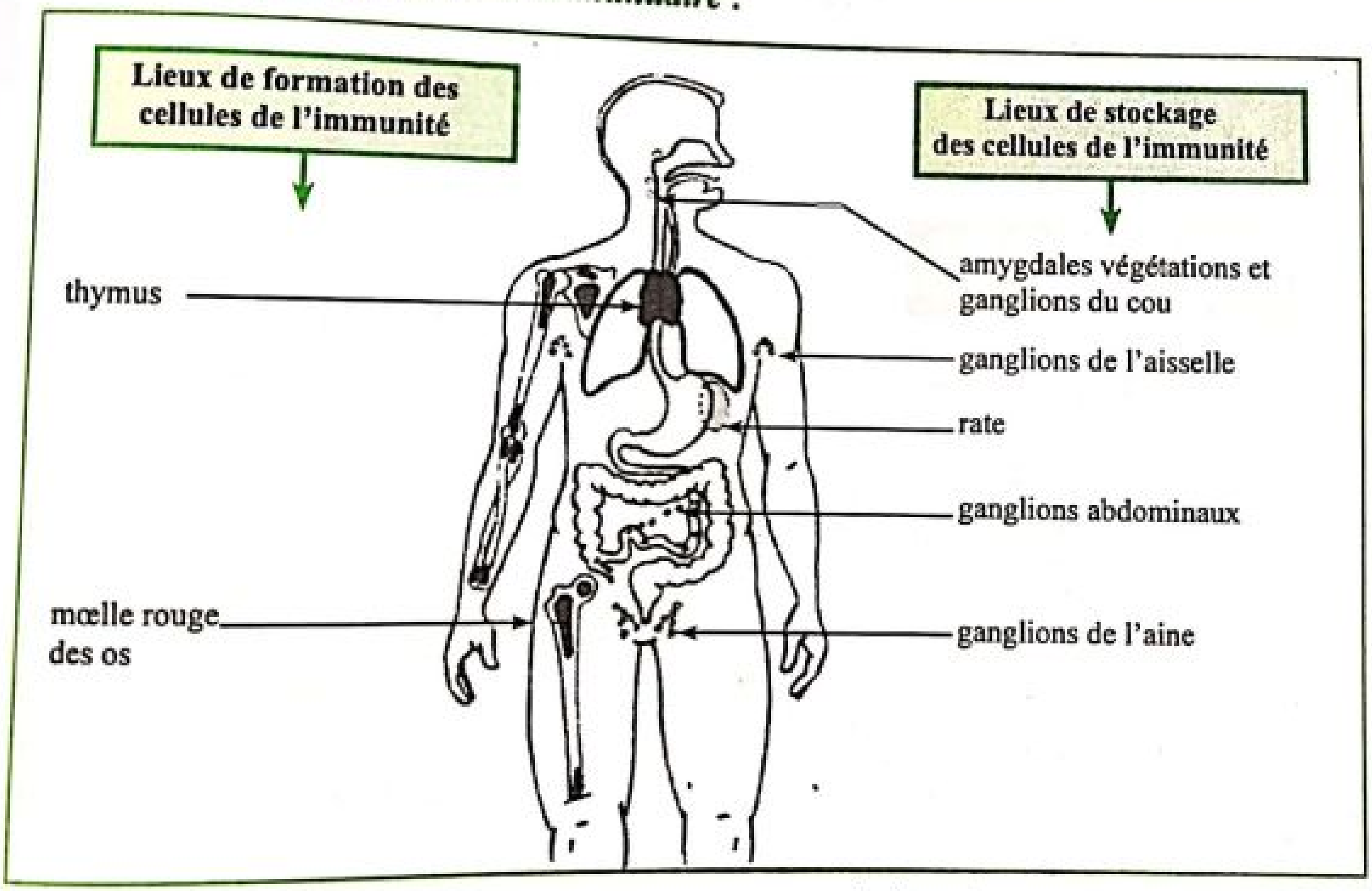
- *Expérience 1* :Les éléments assurant l'immunité et qui ont permis la survie de l'animal existent dans le serum : Ce sont les anticorps et l'immunité est appelée Immunité à médiation humorale.
- *Expérience 2* :La survie de l'animal a été assurée par des cellules appelées lymphocytes c'est l'immunité cellulaire

Scanné avec CamScanner

II - Les cellules immunitaires :



III - Organes du système immunitaire :

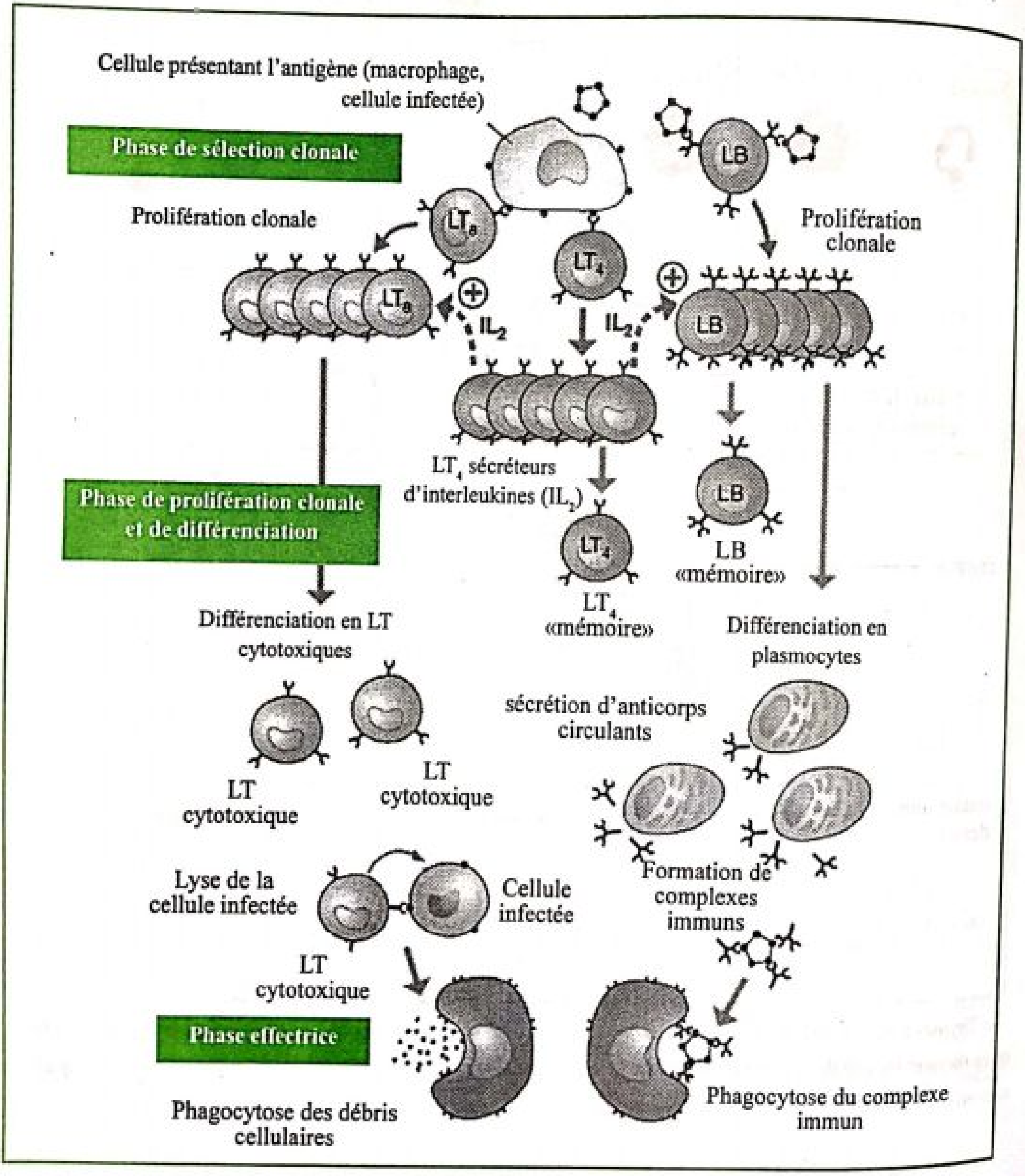


Le Thymus et la moelle osseuse constituent les organes centraux ou principaux du système lymphatique. C'est là où se forment les cellules immunitaires et deviennent matures, la rate; les amigdales, les gonglions lymphatiques constituent des organes périphériques ou secondaires.

IV - Origine des lymphocytes :

Les lymphocytes B et T comme toutes les cellules sanguines prennent naissance dans la moelle osseuse ; mais les LB acquièrent leurs competences immunitaire dans la moelle osseuse avant d'aller aux organes de stockage. Pour les LT ; ils naissent dans la moelle osseuse et doivent passer au thymus pour y acquerir leurs compétence immunitaire et ensuite joindre les LB dans les organes de stockage.

V - Les étapes de l'immunité spécifiques

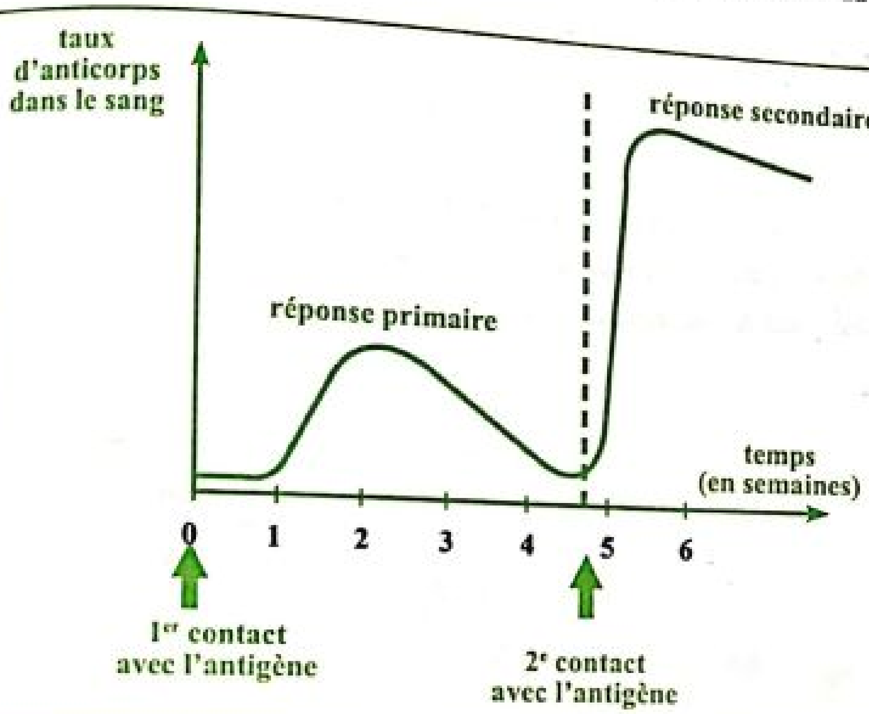


Scanné avec CamScanner

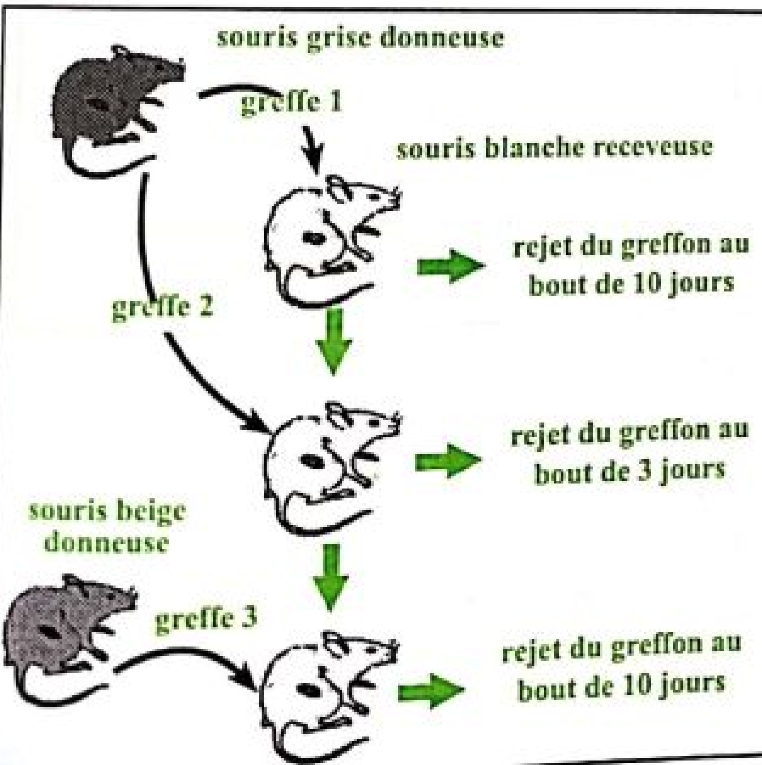
Chapitre 5 La mémoire immunitaire.

La mémoire immunitaire : c'est la capacité d'un organisme à se souvenir d'un antigène avec lequel il a déjà été au contact.

Cette mémoire est attribuée aux lymphocytes B et T qui réagissent différement s'ils ont déjà été confrontés à un antigène donné. La réponse est plus rapide, plus efficace et plus durable au second contact qu'au premier.



La première réponse immunitaire après le premièr contact est lente et faible, alors que la deuxième réponse est plus forte et plus rapide que la première : il y a intervention de la mémoire immunitaire humorale (anticorps).



Les greffons 1 et 3 sont rejetés après 10 jours c'est le premier contact avec le système immunitaire; mais le greffon 2 déjà connu par le système immunitaire est rejeté après 3 jours seulement : il y a intervention de la mémoire cellulaire.

SVT

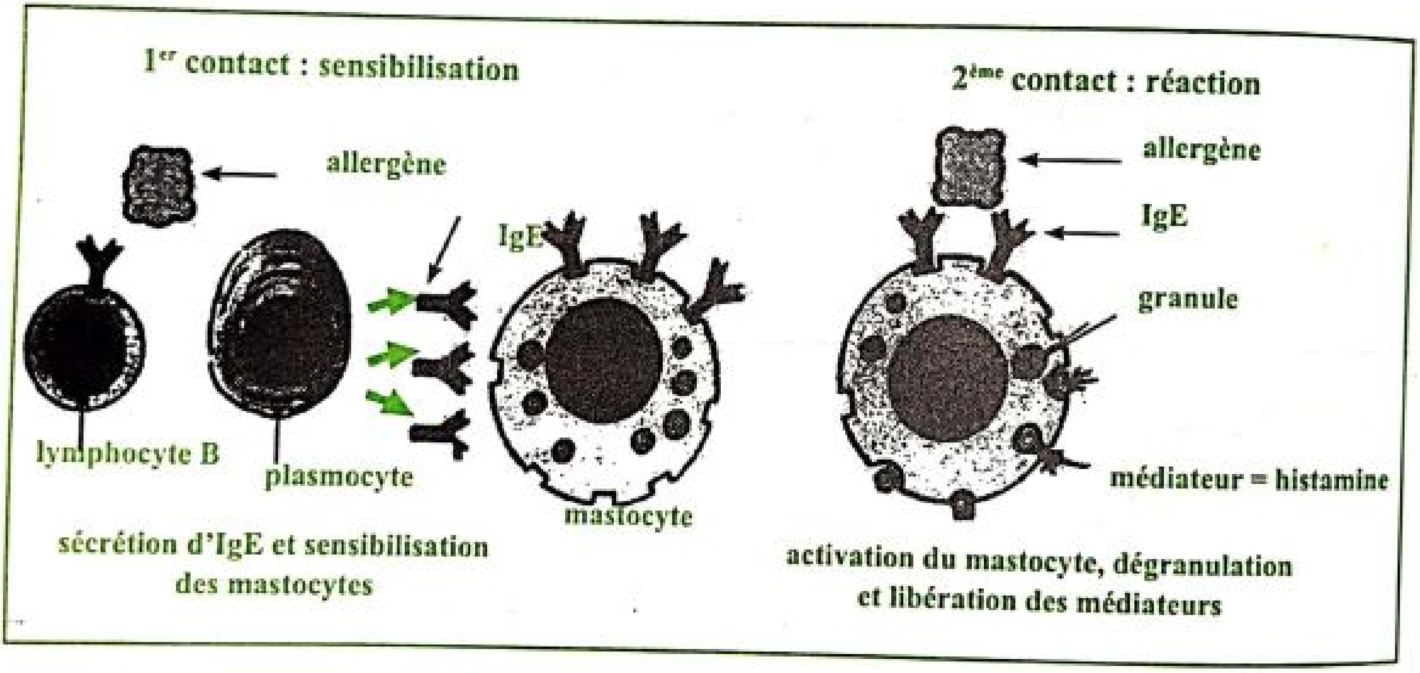
Chapitre V Dysfonctionnement du système immunitaire.

Dans certains cas le système immunitaire n'accomplit pas son rôle ; les réponses peuvent être execives ou au contraire insuffisantes, il en résulte trois types de maladies.

- Les allérgies : réponse immulitaire excessive du système immunitaire.
- Les maladies auto-immunes : le système immunitaire attaque le soi (ne sont pas traités par notre programme).
- Les déficiences immunitaires : il y a une déficience et une faiblesse du système immunitaire.

I - Les allérgies :

L'allérgie est une réaction anormale exessive. L'antigène déclenchant la réponse immunitaire est appelé allérgène. l'allérgène est bien toléré par la plupart de la population mais les personnes allérgiques déclenchent une réaction excessive et pathogène appelée allérgie, c'est le cas de l'éczema, rhimite, asthme .... Le mécanisme de la réponse immunitaire allergique est le suivant :



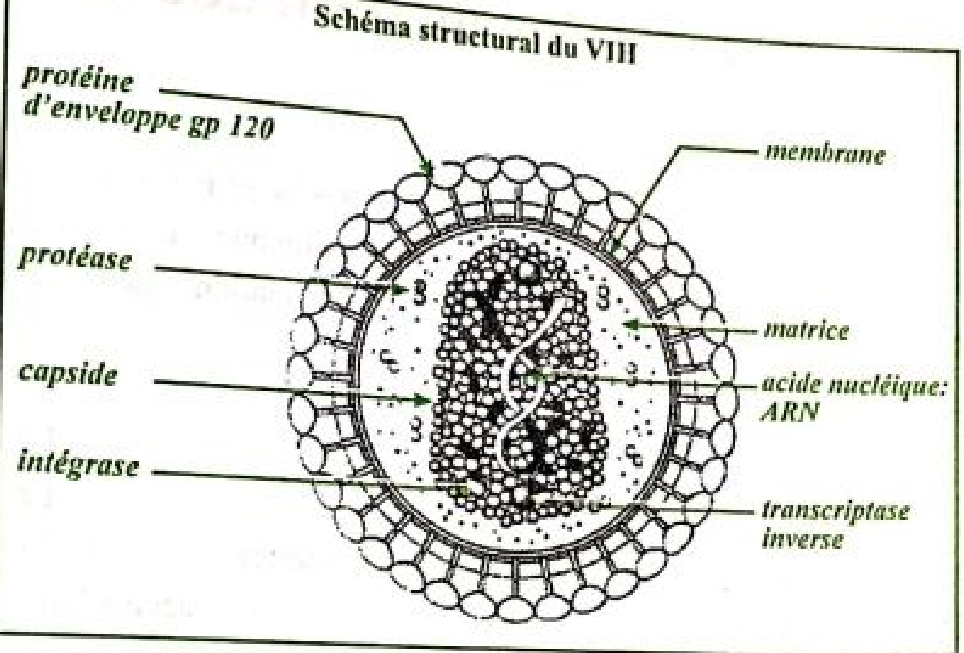
II - La dificience immunitaire :

La déficience immunitaire est une situation pathogène liée à l'insuffisanse d'une ou plusieurs fonctions immunitaires, certaines sont d'ordre génétiques et héréditaires, d'autres sont acquises comme le sida.

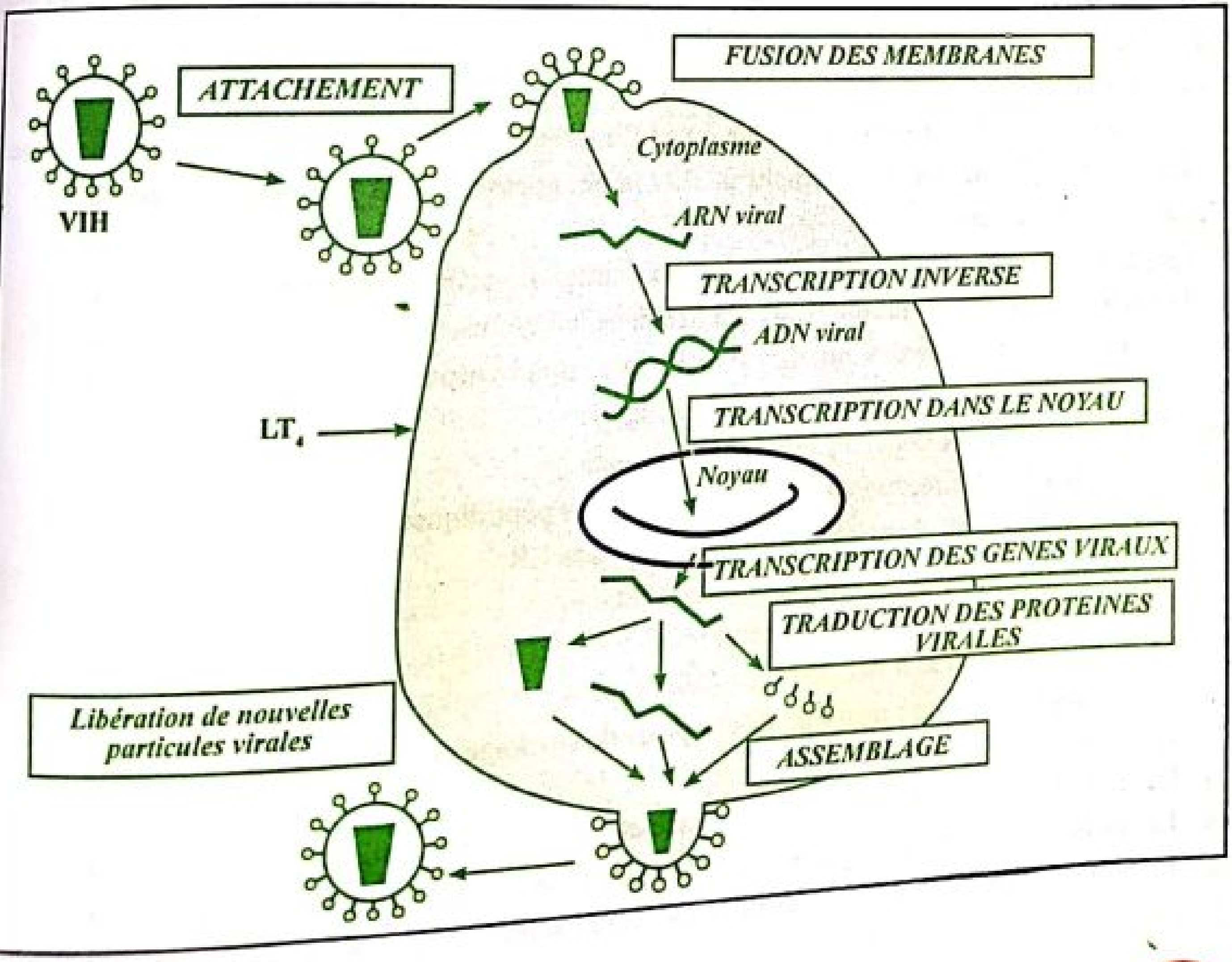
Le sida ou syndrome d'immunodéficience acquise est un ensemble de symptomes consécutifs à la déstruction des cellules du système immunitaire par le VIH (virus d'immunodeficience humaine), le sida est le dernier stade de l'infection par le VIH.

Scanné avec CamScanner

La structure de VIH est la suivante :

Le VIH est un virus qui ne possède pas d'organites cellulaires lui permettant de faire ses propres réactions métaboliques, son matériel génétique est sous forme d'ARN.	

La cellule hôte du VIH est le lymphocyte T_4 du fait de la complémentarité structurale des recepteurs CD_4 des LT_4 et des glycoprotéines gp 120 du VIH. Le cycle de vie du VIH est le suivant :



Questions d'évaluation des connaissances

I - Définir les notions suivantes :

Le non soi – Le CMH – Le facteur complément – La phagocytose – Les organes lymphatiques – l'anticorps – L'immunité humorale – Le complexe immun – L'immunité cellulaire – L'interleukine – L'allergène – L'allergie – Le plasmocyte – La vaccination – Le vaccin – La sérothérapie.

II - Déterminer le (ou les) rôle des éléments suivants :

1 : CMH ; 2 : L'histamine ; 3 : Les facteurs du complément ;
4 : Le macrophage ; 5 : La moelle osseuse ; 6 : Le thymus ;
7 : T_4 ; 8 - La rate et les ganglions lymphatiques; 9 : LT8 ;
10 : Les anticorps. 11 : IgM ; 12 : La vaccination ; 13 : La sérothérapie.

III- Déterminer les propositions justes et celles qui sont fausses :

1 - Le CMH est contrôlé par trois gènes liés portés par le chromosome 6.
2 - La réaction inflammatoire est connue par le gonflement des ganglions lymphatiques et une élévation locale de température.
3 - Le greffon est rejeté dans le cas de l'isogreffe.
4 - La réponse immunitaire non spécifique exige l'intervention des lymphocytes et l'interleukine.
5 - L'activation du facteur complément facilité la phagocytose et la formation du complexe d'attaque membranaire.
6 - La phagocytose commence par la fixation de l'antigène sur le phagocyte.
7 - Les LB acquièrent leur immunocompétence dans le thymus.
8 - Chaque clone de LB forme toujours le même type d'anticorps.
9 - Les LT reconnaissent le complexe CMH- antigène.
10 - La phagocytose est assurée par les LB.
11 - Les LB portent des récepteurs formés de 4 chaines peptidiques.
12 - Les plasmocytes résultent de la différenciation des LB.
13 - Les anticorps sont produits par les mastocytes.
14 - Les mastocytes produisent l'histamine.
15 - La maturation des LB a lieu dans la moelle osseuse.
16 - Les ganglions lymphatiques sont des organes de stockage des lymphocytes.
17 - Les LT8 secrètent les anticorps.
18 - Les LTC assurent la double reconnaissance et secrètent la pérforine.
19 - Les cellules immunitaires sont stockées dans la moelle osseuse.
20 - La différenciation des LB en plasmocytes exige l'intervention des LT.

21 - L'ablation du thymus permet au corps d'accepter tout greffon.
22 - La maturation des LB et LT a lieu dans la moelle osseuse.
23 - Les LTC sont les seules lymphocytes produisant les anticorps.
24 - Les anticorps peuvent faciliter la phagocytose.
25 - L'anticorps est une molécule protéinique.
26 - La mémoire immunitaire est une caractéristique de l'immunité spécifique et non spécifique.
27 - La vaccination est un moyen pour aider le système immunitaire à éliminer rapidement et non spécifiquement tout antigène.
28 - L'immunité spécifique cellulaire est assurée par la pérforine et les anticorps.
29 - La pérforine forme le complexe immun.
30 - La sérothérapie est une aide au système immunitaire de longue durée.
31 - La sérothérapie est un moyen préventif.
32 - L'allergie est une hypersécrétion des anticorps IgA.
33 - L'allergie résulte d'une hypersécrétion de pérforine.
34 - Le vaccin est un injection du corps par un antigène virulent.
35 - Le VIH attaque les LB.
36 - Le SIDA se transmet par voie sexuelle.

IV - Q.C.M. Déterminer la ou (les) réponses justes :

1 - Le C.M.H :

a - Est une protéine cytoplasmique.
b - Est une protéine membranaire.
c - Est contrôlé par un seul gène.
d - Est contrôlé par plusieurs gènes.

2 - La phagocytose est un phénomène immunitaire :

a - Spécifique et non spécifique.
b - Réalisé par les phagocytes et le LT.
c - Qui peut être facilitée par anticorps.
d - Nécessaire au macrophage pour présenter l'antigène aux LT.

3 - Le facteur complément :

a - Est un ensemble peptidique plasmatique.
b - Permet la formation du complexe d'attaque membranaire.
c - Intervient dans l'opsonisation.
d - Permet le chimiotactisme des LB vers l'antigène.

4 - Les organes lymphatiques centraux sont :

a - La moelle osseuse.
b - Le thymus.
c - Les ganglions lymphatiques.
d - La moelle épinière.

5 - L'anticorps :

SVT

Scanné avec CamScanner

a - Est formé de deux chaines peptidiques.
b - Est formé de quatre chaines peptidiques.
c - Est l'élément effecteur de l'immunité humorale.
d - Intervient dans l'immunité non spécifique.

6 - Les lymphocytes B :
a - Sont produits au niveau de la moelle osseuse.
b - Se différencie en plasmocyte.
c - Secrètent l'interleukine 2.
d - Sont produits dans le thymus.

7 - Les lymphocytes T_4 :
a - Sont immunocompétents dans la moelle osseuse.
b - Produisent la pérforine.
c - Sont nécessaire pour que les plasmocytes produisent les anticorps.
d - Secrètent les interleukines et le M.A.F.

8 - Les lymphocytes T_4 :
a - Reconnaissent le déterminant antigenique présenté par les macrophages.
b - Portent les récepteurs CD_4 et CD_8.
c - Activent le LT_8 et les LB.
d - Sont des cellules effectrices de l'immunité non spécifique.

9 - La pérforine :
a - Est sécrété par les LTC.
b - Intervient dans l'immunité à médiation humorale.
c - Perfore la membrane cytoplasmique de la cellule cible.
d - Est sécrétée par les mastocytes.

10 - L'immunité à médiation humorale :
a - Est assurée par des éléments plasmatiques.
b - Est une immunité spécifique.
c - Est une immunité innée.
d - Nécessite l'intervention de LT_4, les macrophages, LB et les plasmocytes.

11 - L'immunité à médiation cellulaire :
a - Est assurée par les IgG.
b - Est une immunité non spécifique dont les cellules effectrices sont les LTC.
c - Nécessite la coopération des macrophages, LT_4 et LTC.
d - Est exécutée par les LTC qui sécrètent la perforine.

12 - La mémoire immunitaire :
a - Est une particularité de l'immunité spécifique et non spécifique.
b - Est spécifique à un antigène donné.
c - Intervient après le premier contact avec un antigène donné.

Scanné avec CamScanner

d - Est une technique sur laquelle se base la vaccination.

13 - La mémoire immunitaire :

a - Est spécifique

b - Est non spécifique.

c - Peut-être à médiation humorale.

d - Peut-être à médiation cellulaire.

14 - La sérothérapie est un moyen immunitaire :

a - Spécifique.

b - Non spécifique.

c - Préventif.

d - Curatif.

15 - La sérothérapie :

a - Est une opération pour activer l'immunité non spécifique.

b - Est une opération dans laquelle le corps est passif.

c - Est un transfert d'immunité spécifique.

d - Est assurée par la perfusion en sérum.

16 - L'allergie :

a - Est un dysfonctionnement du système immunitaire.

b - Est une hypersécrétion d'histamine.

c - Est une hypersensibilité à un antigène donné.

d - Est une réaction immunitaire contre un antigène normalement non pathogène.

17 - Les sujets :

a - Présentent un taux élevé des IgE.

b - Sont exposés aux maladies opportunistes.

c - Sont tous allergiques pour les mêmes antigènes.

d - Peuvent être guéris par désensibilisation.

18 - Le VIH :

a - Est un rétrovirus.

b - Attaque les LT_8.

c - Présente une grande affinité vers les LT_4.

d - Favorise l'apparition des maladies opportunistes.

V - Comparer entre :

1 - L'immunité innée et l'immunité spécifique.

2 - L'immunité cellulaire et l'immunité humorale.

3 - LT_8 et LB.

4 - La sérothérapie et la vaccination.

SVT

Scanné avec CamScanner

Réponses

I - Définitions :

1 - Le non soi est tout élément déclenchant une réponse immunitaire.

2 - Le CMH est une glycoprotéine membranaire des cellules nucléées permettant de déterminer l'identité histologique de la personne : il est également appelé HLA ou marqueur majeur du soi.

3 - Le facteur complément est un ensemble de peptides plasmatiques inactives qui sont active soit par le complexe immun ou par les constituants de la membrane de l'antigène.

4 - La phagocytose est un phénomène accomplit par des globules blancs consistant à ingérer, diriger puis excréter un antigène donné.

5 - Les organes lymphatiques sont des organes responsables de produire et de stocker les cellules immunitaires et ils sont centraux (moelle osseuse et thymus) ou périphériques (rate et ganglions lymphatiques).

6 - Le complexe immun est un complexe résultant de la liaison des anticorps avec un antigène donné.

7 - L'immunité humorale est une immunité spécifique accomplit par les lymphocytes (LTC) en secrétant la pérforine et le granzyme.

8 - L'anticorps est une immunoglobuline de nature protéinique circulant dans le plasma, formé de quatre chaines peptidiques, dont deux légères et deux lourdes et constitue l'élément effectué de l'immunité à médiation humorale.

9 - L'interleukine est une protéine hormonale constituant un médiateur chimique secrété par certaines cellules immunitaires pour activer d'autres.

10 - L'allergène est un antigène normalement non pathogène mais provoque chez certaines personnes une réaction immunitaire humorale caractérisée par une hypersécrétion des I g E.

11 - L'allergie est un dysfonctionnement du système immunitaire caractérisé par une hypersensibilité envers un allergène donné.

12 - Le plasmocyte est une cellule immunitaire résultant de la différenciation des LB et responsable de la sécrétion des anticorps, effecteur de l'immunité humorale.

13 - La vaccination est une opération consistant à l'injection du corps par un antigène affaiblie dans le but à l'inciter à acquérir une immunité spécifique.

14 - Le vaccin est une dose d'une solution contenant un antigène affaiblie qui déclenche une immunité spécifique préventive.

15 - La sérothérapie est un acte curatif consistant à injecter ou perfuser le sujet par un sérum contenant des anticorps spécifiques contre un antigène donné.

II - Le rôle des éléments proposés :

1 - Le CMH détermine l'identité histologique qui joue un rôle important dans les opérations des greffes. Il joue également le rôle de présenter les déterminants antigéniques du soi et du non soi.

Scanné avec CamScanner

2 - L'histamine joue un rôle dans l'apparition de l'inflammation.

3 - Les facteurs du complément jouent trois rôles essentiels :

- L'opsonisation : faciliter la phagocytose.
- Le chimiotactisme des globules blancs vers le foyer de l'inflammation.
- La formation du complexe d'attaque membranaire.

4 - Le macrophage joue le rôle de :

- La phagocytose dans l'immunité non spécifique.
- Phagocyter l'antigène et de le présenter sous forme de déterminant antigénique aux LT_4 dans l'immunité spécifique.

5 - La moelle osseuse joue le rôle d'organe lymphatique centrale en produisant toutes les cellules immunitaires ainsi que la maturation des LB.

6 - Le thymus est un petit organe lymphatique centrale assurant la maturation des LT.

7 - LT_4 est une cellule immunitaire constituant le pilier de l'immunitaire spécifique, elle reconnait l'antigène qui lui est présenté sous forme de déterminant antigénique par les macrophages et active les LT et les LB.

8 - La rate et les ganglions lymphatiques constituent des organes lymphatiques permettant le stockage des cellules immunitaires.

9 - LT_8 des lymphocytes qui reconnaissent l'antigène et se différencient en LTC sécrétrices de pérforine et de granzyme.

10 - Les anticorps jouent trois rôles essentiels :

- La formation du complexe immun.
- L'opsonisation : facilite la phagocytose.
- Active les facteurs de complément.

11 - I g M sont des récepteurs membranaires des LB leur permettant de reconnaitre directement l'antigène.

12 - La vaccination est un acte préventif permettant au corps d'être immunisé contre un antigène donné ; et permet également d'activer la mémoire immunitaire.

13 - La sérothérapie est un acte curatif dont le rôle est de transférer une immunité spécifique et ceci pour une courte durée.

III - Les propositions justes et les propositions fausses :

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	F	V	F	F	V	V	F	V	V	F

Scanné avec CamScanner

Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Réponses	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V

Questions	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Réponses	V	F	F	V	V	F	F	F	F	F

Questions	31	32	33	34	35	36
Réponses	F	F	F	F	F	V

SVT

IV - Q.C.M :

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	b,d	a,c,d	a,b,c	a,b	b,c	a,b	c,d	a,c	a,c	a,b,d

Questions	11	12	13	14	15	16	17	18
Réponses	c,d	b,d	a,c,d	a,d	b,c,d	a,d,c,d	a,d	a,c,d

V - Comparaison :

1 -

Immunité innée	Immunité spécifique
Immédiate et rapide	Lente
Non spécifique, destinée contre tous les antigènes	Spécifique destinée contre un antigène précis
Innée, présente chez l'individu dès sa naissance	N'apparait qu'après l'infection par l'antigène
Présente durant toute la vie de l'individu	Dure quelques mois à quelques années

Scanné avec CamScanner

2 -

Immunité cellulaire	Immunité humorale
Spécifique	Spécifique
Les cellules intervenants sont Macrophage, LT_4, LT_8, LT_C	Les cellules intervenant : Macrophage, LT_4, LB, plasmocyte.
L'élément effecteur La pérforine et granzyme	L'élément effecteur : Les anticorps
Se déroulent selon les mêmes phases : Induction – Amplification – Phase effectrice	

3 -

LT_8	LB
Intervient dans l'immunité cellulaire	Intervient dans l'immunité humorale
Activé par LT_4	Activé par LT_4
Se différencie en LTC	Se différencie en plasmocyte

4 -

La sérothérapie	La vaccination
Injection du sujet par du sérum contenant des anticorps	Injection du sujet par un antigène affaiblie
Aide spécifique de l'immunité	Aide spécifique de l'immunité
A un but curatif	A un but préventif
Dure quelques jours à quelques semaines	Dure quelques semaines à plusieurs mois
Le corps est passif, on lui a transmis une immunité prête	On incite le corps à acquérir une immunité

SVT

Modèles de concours avec solutions

Scanné avec CamScanner

Examen 1 Faculté de Marrakech

Déterminer la réponse juste pour chaque proposition

Question 1

A - La fermentation d'une molécule de glucose produit ~~3~~2ATP.

B - L'oxydation totale d'une molécule d'acide pyruvique produit 32ATP dans la cellule.

C - Le rendement énergétique de la dégradation du glucose par fermentation est de 40,5%.

D - L'oxydation totale d'une molécule de glucose libère dans la cellule 32ATP.

E - Le rendement énergétique de la dégradation du glucose par respiration est faible et de l'orde de 40,5%.

Question 2

A - La chaine réspiratoire fait augmenter la concentration des ions dans la matrice.

B - Le gradient de concentration des protons entre la matrice et la membrane interne mitochondriale permet la production de l'ATP.

C - La chaine respiratoire faut augmenter la concentration des ions, et fait baisser le PH de l'espace intermembranaire.

D - La différence de concentration des ions entre la matrice et le milieu extérieur de la mitochondrie permet la production de l'ATP.

Question 3

A - Le dernier acide aminé de toutes les protéines est la méthionine car le dernier codon de l'ARNm est AUG.

B - Le gène contrôle un type d'allèle.

C - ARN_t est une molécule responsable de transférer l'information génétique du noyau à l'hyaloplasme.

D - Tous les codons conduisent à la formation d'un acide aminé.

E - L'ARN_t peut contenir la base azotée thymine.

Question 4

A - La phosphocréatine permet la production de l'ADP pendant la fermentation lactique.

B - La réaction entre deux molécules d'ADP produit rapidement l'ATP dans le muscle.

C - La phosphocréatine résulte de l'hydrolyse des réserves glycogéniques dans le muscle.

D - La synthèse des acides aminés et la maturation des protéines a lieu dans l'appareil de golgi.

E -Les vésicules golgiennes secrètent les protéines dans l'appareil de golgi.

Question 5

La fibre musculaire I contient une grande quantité de glycogène et de mitochondries et très peu d'ATP ase comparativement à la fibre musculaire II.

A -La fibre I n'utilise pas l'ATP pour produire l'énergie.
B -La fibre I n'utilise pas d'O_2 pour produire l'énergie.
C -La fibre II utilise l'énergie plus rapidement que la fibre I.
D -La fibre II utilise le glycogène comme source principale pour la production d'énergie.
E - Les muscles des spécialistes du marathon sont très riches par les fibres II.

Question 6

Dans une population de 1000 individus avec f(M) = 0,54 et f(N) = 0,45, le nombre des individus à génotype MN est :

A - 542,5
B - 494,4
C - 500
D - 475,5
E - 503,6

Question 7

A -Les muqueuses respiratoires empêchent la pénétration des microbes grâce à LT_4.
B L'histamine est une substance inflammatoire responsable du chimiotactisme des cellules immunitaires.
C -Les protéines du facteur complément complète l'élimination des microbes après intervention des LT_4.
D -Le facteur complément intervient dans les deux voies cellulaires et humorales.

Question 8

A -Le VIH échappe au contrôle de l'immunité car il présente très peu de mutations.
B -Les protéines gp120 du VIH présentent une grande affinité pour les lymphocytes T8.
C -La technique ELISA est moins précise que la technique Western blot pour la mise en évidence de la présence du VIH.
D -L'infection par le VIH entraine la mort de la personne suite à sa multiplication dans toutes les cellules.
E -La sérothérapie est d'un des moyens les plus importants dans le traitement du Sida.

Réponses

Questions	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
Réponses juste	E	C	B	B	C	B	B	C

Scanné avec CamScanner

Examen 2 Faculté de Casablanca

Déterminer la(ou les) bonne réponse pour chaque proposition

Question 1

Les mitochondries :

A -Sont des organites nucléaires.
B -Sont des organites cytoplasmiques.
C Sont visibles au microscope.
D -Sont responsable de la respiration cellulaire.
E Leur morphologie varie en fonction des organes.

Question 2

La membrane mitochondriale interne diffère de la membrane externe par :

A -Sa ressemblance à la membrane cytoplasmique.
B -Sa grande surface.
C La présence de crêtes.
D Un grand nombre de protéines.
E La présence de l'ATP synthétase.

Question 3

La glycolyse dans la cellule :

A - a lieu dans l'espace intermembranaire.
B - a lieu dans le cytoplasme.
C - a lieu dans les fibres musculaires.
D - Est commune à la respiration et la fermentation.
E Produit deux molécules d'acide pyruvique.

Question 4

Le renouvèlement cellulaire :

A - Est possible dans tous les tissus.
B - Remplace les cellules mortes.
C - Se fait par mitoses.
D - Nécessite l'ATP.

SVT

Scanné avec CamScanner

E Nécessite des enzymes.

Question 5

La fibre musculaire du muscle squelettique :

A - Est un ensemble de cellules.

B - Est une seule cellule

C - Est formée par myofibrilles.

D Est plurinuclée

E - Contient un seul noyau.

Question 6

Dans le muscle squelettique les éléments non visibles au microscope optique sont :

A - Le noyau.

B L'appareil de golgi.

C Les myofilaments d'actine.

D - Le sarcoplasme.

E - Les faisceaux musculaires.

Question 7

La tropomyosine :

A - Est présente dans les myofilaments de myosine.

B - Est présente dans les myofilaments d'actine.

C Est présente dans le sarcoplasme.

D Est un inhibiteur naturel de la contraction musculaire.

E - Porte deux têtes ayant une activité d'ATPase.

Question 8

Le sarcomère :

A - Est formé de myofilaments musculaires.

B - Est formé de myofilaments fins.

C Est présente de myofilaments de myosine.

D - Contient un disque clair formé seulement de myofilament d'actine.

E - Contient un disque sombre formé seulement de myofilaments de myosine.

Question 9

Le calcium dans la cellule musculaire :

A - Est stocké dans la mitochondrie.

B - Est stocké après le sarcoplasme.

SVT

C - Est libéré après l'arrivée de l'influx nerveux à la cellule musculaire.
D - Sa fixation sur la myosine provoque le glissement de ce dernier entre les filaments d'actine.
E - Sa présence dans le cytoplasme fait entrer le muscle dans une phase de repos. ?

Question 10

La (ou les) voie lente de régénération d'ATP dans la fibre musculaire :
A - La dégradation du glycogène.
B - La glycolyse.
C - La respiration.
D - Déphosphorylation de la créatine phosphate.
E - La fermentation cellulaire.

Question 11

La réalisation du caryotype nécessite :
A - Les globules rouges.
B - Les globules blancs.
C - Un milieu de culture.
D - Une substance pour stopper la mitose.
E - Un milieu hypotonique.

Question 12

La synthèse des protéines dans la cellule :
A - A lieu dans les mitochondries.
B - Nécessite des vésicules pour leur transfert.
C - A lieu au niveau des ribosomes.
D - Nécessite l'ATP.

Question 13

La molécule d'ADN :
A - Est présente dans le cytoplasme.
B - Est présente dans la mitochondrie.
C - Est présente dans le noyau.
D - Porte la base azotée d'adénine.
E - Porte la base azotée d'uracile.

Question 14

Le gène :
A - Contrôle la synthèse d'un glucide donné.

SVT

B -Contrôle la synthèse d'une protéine donnée.
C Contrôle un caractère donné.
D Est une séquence nucléotidique.
E -Est constitué d'acide aminés.

Question 15

A propos de l'ARNt :

A -Est actif dans le noyau.
B Est actif dans le cytoplasme.
C -Une seule molécule d'ARNt ne suffit pas à l'élongation de la protéine.
D -Porte un site de fixation de l'acide aminé.
E -A un site portant le codon UAA.

SVT

Question 16

Parmi les anomalies qu'on peut diagnostiquer par les caryotypes :

A -La maladie de drépanocytose.
B -La translocation de portions de gènes.
C -Diminution du nombre des chromosomes.
D -Le syndrome de Down.
E -La mutation au niveau d'un chromosome .

Question 17

La fécondation d'un Ovule sans noyau a donné un œuf de formule chromosomique : 44A + XX. Quelle est la proposition juste :

A -La fécondation a eu lieu par un seul spermatozoïde.
B -La fécondation a eu lieu par deux spermatozoïdes.
C On obtiendra un fœtus femelle.
D -On obtiendra un fœtus mâle.
E -Aucun fœtus ne sera formé.

Question 18

Les cellules portant les récepteurs CD_4.

A -Sont des cellules haploïdes.
B -Sont les lymphocytes T.
C -Sont les cellules injectées lors d'une vaccination.
D -Ne portent pas de CMH.
E Sont les cellules cibles du VIH.

Scanné avec CamScanner

Question 19

Quel est le (ou les) organe lymphatique primaire dans lequel a lieu la formation et la maturation des cellules immunitaires :

A - Les amygdales.

B - La moelle épinière.

C - La rate.

D - Les ganglions lymphatiques.

C Le thymus.

Question 20

Les lymphocytes B :

A - Sont responsable de l'immunité naturelle.

B Sont responsable de l'immunité spécifique.

C - Acquièrent leur immunocompétente dans le thymus.

D - Sont différenciés en lymphocytes cytolytiques.

E - Sont différenciés en cellules mémoires.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	B - C D - E	B - C D - E	B - C D - E	B - C D - E	B - C D	B - C D	B - C	B - C D	B - C	C

Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Réponses	B - C D - E	B - C D	B - C D	B - C D	B - C D	B - C D	B - C	B - D	B	B

SVT

SVT

Examen 3 Faculté de oujda

Déterminer la(ou les) bonne réponse pour chaque proposition

Question 1

Au niveau de la mitochondrie :

A - Le cycle de Krebs se déroule selon 7 réactions successives.

B - Se produit 32ATP pour chaque molécule de glucose.

C - Il y a réduction de 8 transporteurs d'e^- pour chaque molécule de glucose.

D - L'oxydation totale de $FADH_2$ et $NADH_2$ produit 11ATP.

E - Il y a production de $4CO_2$ pour chaque molécule de glucose au niveau du cycle de Krebs.

Question 2

Au niveau du muscle :

A - Le relâchement ne consomme pas d'ATP.

B - La bande A se rétrécit pendant la contraction.

C - Il y a stockage du calcium au niveau du ergastoplasme.

D - La bande H ne se rétrécit pas au cours de la contraction.

E - L'influx nerveux n'est pas responsable de la libération du calcium.

Question 3

Les constituants des myofilaments d'actine sont :

A - Troponine et Actine.

B - Tropomyosine.

C Troponine, Tropomyosine et Actine.

D - Troponine et Tropomyosine.

E - Troponine, Tropomyosine et myosine.

Question 4

L'hérédité :

A - Les protéines sont formées au niveau de l'ergastoplasme lisse.

B - Le nucléoside est un nucléoside plus un acide phosphorique.

B - L'ARN est localisé dans le noyau et le cytoplasme.

C - Le gène est l'une des formes d'un caractère donné.

E - Les ribosomes sont formés de trois unités.

Question 5

Quelle est la maladie résultant d'une variation du nombre des chromosomes sexuels :

Scanné avec CamScanner

A - Syndrome de la trisomie 13.
B - Syndrome de Down.
C - Syndrome de Turner.
D - Syndrome de cri du chat.
E - Toutes les réponses sont fausses.

Question 6

Le gène est :
A - La (ou les) forme d'un caractère donné.
B - La plus petite portion d'ADN contrôlant un caractère donné.
C - Le nombre des chromosomes d'une cellule.
D - Un ensemble de molécule
E - Est transféré seulement par reproduction non sexuée.

Question 7

Les lymphocytes :
A - Les LB sont produits dans la moelle osseuse et matures dans les ganglions lymphatiques.
B - Les LB sont produits dans le moelle osseuse et matures dans la rate.
C - Les LT sont produits et matures dans la moelle osseuse.
D - Les LT sont produits dans la moelle osseuse et mature dans les ganglions lymphatiques
E - Toutes les réponses sont fausses.

Question 8

Le CMH :
A - Est porté par la surface de toutes les cellules du corps.
B - Les LT_4 reconnaissent le déterminant antigenique présenté par le CMH II.
C - Les LT_8 reconnaissent le déterminant antigenique présenté par le CMH I.
D - Le CMH est une glycoprotéine membranaire.
E - Est une unité identique chez tous les êtres humains.

Question 9

Les anticorps :
A - Sont formés d'une chaine peptidique lourde et une chaine peptidique légère.
B - La chaine peptidique légère est codée par un gène porté par le chromosome 17.
C - La chaine peptidique légère est codée par un gène porté par le chromosome 2.
D - La chaine peptidique lourde est codée par un gène porté par le chromosome 14.
E - Sont secrétés par les lymphocytes T.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Réponses	E	C	C	C	C	B	E	B	E

SVT

Scanné avec CamScanner

Examen 4 Faculté de oujda

Déterminer la(ou les) bonne réponse pour chaque proposition

Question 1

Au niveau du cycle de Krebs :

A - La réaction de l'acétyle coenzyme A a lieu dans la membrane mitochondriale interne.
B - Une seule molécule d'acétyle coenzyme A donné 18ATP.
C - Une seule molécule d'acétyle coenzyme A donné 4 NADH.
D Le $FADH_2$ est libéré lors de la réaction transformant le succinate au fumarate.
E - Se forme : $1FADH_2 + 3NADH + 1ATP + 4CO_2$ pour chaque molécule d'acétyle coenzyme.

Question 2

La fibre musculaire :

A - La fibre musculaire I n'utilise ni ATP ni phosphocréatine pour produire l'ATP.
B - La phosphocréatine permet la production rapide d'ATP pendant la fermentation lactique.
C - La fibre musculaire II est abondante chez les spécialistes du marathon.
D - Le rôle de l'ergastoplasme est de produire l'adénosine triphosphate nécessaire à la contraction musculaire.

Question 3

L'antigène :

A - Est formé d'une chaine constante et deux chaines légères variables.
B Le CMH présente l'antigène à la surface de la cellule.
C - Le CMH est l'antigène.
D - Est formé par deux chaines lourdes et une chaine légère.
E - La sérothérapie est l'injection du sujet par un antigène affaibli.

Question 4

Les cellules immunitaires :

A - Sont formées dans le thymus et la rate.
B - Sont formées dans le thymus et le foie.
C - Pour traiter une allergie on injecte le sujet allergique par des quantités de plus en plus grande de l'allergène pendant une longue durée.
D - Les phagocytes sont des lymphocytes intervenant dans l'immunité.
E - Les lymphocytes mémoires ne sont pas des cellules immunitaires.

Question 5

La dérive génétique est :

Scanné avec CamScanner

A - L'apparition de nouvelles caractères génétiques à travers les générations dans une grande population.
B - L'apparition de nouveaux allèles et la disparition d'autres dans une grande population.
C - La disparition des allèles à travers les générations dans une petite génération.
D - L'évolution des allèles sans leur disparition dans une petite population.
E - La disparition des allèles et l'apparition d'autres à travers les générations dans une petite génération.

Question 6

L'ADN du Mycobactérium tuberculoses est constitué de 18% de thymine.
Quelle est la proportion des autres bases azotées A, G et C.

A - 18,1% de G - 31,9% de C - 31,9% de A.
B - 27,3% de G - 27,3% de C - 27,3% de A.
C - 18,1% de A - 31,9% de C - 31,9% de G.
D - 18,1% de C - 31,9% de G - 31,9% de A.
E - 18,1% de G - 18,1% de A - 31,9% de C.

Question 7

Dans le cas de codominance. On obtient les % suivants :
A - 75% du phénotype de l'un des deux parents et 25% de l'autre parent dans la 2ᵉ génération.
B - Dans F_1, 50% de phénotype de l'un des deux parents et 50% de nouveau phénotype.
C - Dans F_1, 50% de phénotype de l'un des deux parents, 25% de phénotype de l'autre parent et 25% de nouveau phénotype.
D - Dans F_2, 75% de phénotype de l'un de deux parents et 25% du nouveau phénotype.
E - Dans F_2, 100% du phénotype de l'un des deux parents.

Question 8

Le caryotype humain est :
A - 47A + XYY dans le syndrome de Klinéfeter.
B 45A + X dans le syndrome de Turner.
C - 47A + XXX dans le syndrome de Klinefelter.
D - 46A + XXX dans le syndrome de Turner.
E 47A + XXX dans le syndrome de Down.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponses	D	E	B	C	C	C	A	B

SVT

Scanné avec CamScanner

Examen 5 Faculté de Casablanca

Déterminer la(ou les) bonne réponse pour chaque proposition

SVT

Question 1

Quels sont les éléments observables au microscope optique :

A - Les mitochondries.
B Le noyau.
C - L'appareil de golgi.
D Les cellules.

Question 2

Pendant la fermentation :

A - L'O_2 est consommé.
B Le glucose est consommé.
C - 36ATP sont formés.
D 2ATP sont formés.

Question 3

La fibre du muscle squelettique :

A - Contient un seul noyau au centre.
B - Contient des fibrilles.
C - Contient trois mitochondries.
D - Est une cellule spécialisée.

Question 4

Le sarcomère du muscle squelettique :

A - Est visible au microscope optique.
B - Est formé de filaments d'actine.
C - Est formé de vésicules cytoplasmiques.
D Est formé de filaments de myosine.

Question 5

Parmi les constituants de la mitochondrie :

Scanné avec CamScanner

A - Une seule membrane.
B - L'ADN.
C . Ribosomes.
D - Enzymes.

Question 6

Pendant la liaison des têtes de myosine avec les myofilaments d'actine pendant la contraction :

A - La molécule d'ATP se fixe sur l'actine.
B La molécule d'ATP se fixe sur la myosine.
C L'énergie chimique est transformée en énergie mécanique.
D . La présence des ions Ca^{++} est nécessaire.

Question 7

Le renouvellement cellulaire :

A - Est possible dans toutes les cellules du corps humain.
B Nécessite des enzymes.
C . Nécessite des protéines.
D . Se fait par divisions cellulaires.

Question 8

Le renouvellement moléculaire dans les cellules :

A . A lieu dans les globules rouges.
B - A lieu dans les cellules pancréatiques.
C - Nécessite un noyau.
D - Nécessite des synthèses protéiniques.

Question 9

La synthèse des protéines :

A - A lieu dans le noyau.
B . A lieu dans l'ergastoplasme.
C - Nécessite la présence des acides aminés.
D - Nécessite la présence de mitochondries.

Question 10

Les lymphocytes B sont produits :

A - Dans l'écorce du thymus.
B - Dans la zone médullaire du thymus.
C Dans la moelle osseuse.
D - Dans les ganglions lymphatiques.

SVT

Scanné avec CamScanner

SVT

Question 11

La réponse immunitaire acquise :

A - Est une immunité très efficace.

B - Est basée surtout sur la phagocytose.

C - Utilise la voie cellulaire.

D - Utilise la voie humorale.

Question 12

Les lymphocytes T_8 :

A - Renferment des enzymes.

B - Sécrètent des anticorps.

C - Sécrètent des substances cytolytiques.

D - Entraînent une mort programmée de la cellule.

Question 13

Le VIH :

A - Utilise le récepteur CD_4.

B - Cible surtout les lymphocytes B.

C - Cause l'apparition de maladies opportunistes.

D - Cause des cancers.

Question 14

L'immunité à voie humorale est basée sur :

A - Les anticorps.

B - Les lymphocytes T_8.

C - Les plasmocytes.

D - Les neutrophiles.

Question 15

Pendant l'anaphase I de la méiose :

A - Chaque chromosome est formé de deux chromatides.

B - Il y a ségrégation du centromère.

C - Les chromosomes migrent vers les pôles cellulaires.

D - Le fuseau achromatique disparaît.

Question 16

Pendant le cycle cellulaire :

Scanné avec CamScanner

A - Deux cellules filles identiques sont formées.
B - L'ADN se duplique pendant la mitose.
C - L'ADN est dupliqué pendant l'interphase.
D - La mitose est plus longue que l'interphase.

Question 17

La mutation est une variation :
A - Des nucléotides.
B - Du gène.
C - Dans la synthèse de l'ADN.
D - Du nombre des chromosomes.

Question 18

La cellule cancéreuse :
A - Peut résulter d'une infection.
B - Est exposée aux mutations.
C - Résulte des variations des gènes de la cellule.
D - Résulte des variations des constituants du cytoplasme.

Question 19

Le caractère génétique :
A - Est contrôlée par un gène.
B - Peut être un aspect morphologique.
C - Peut être « la synthèse d'une substance ».
D - Est une séquence nucléotidique.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	A - C	B - D	B - D	B - D	B - D	C - D	B - C- D	B - C + D	B - C	C - D

Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Réponses	A - C C - D	A - C	C - D	A - C	A - C	A - C	A - B C - D	A - C	A - B C

Scanné avec CamScanner

Examen 6 Faculté de Oujda

Déterminer la réponse juste pour chaque proposition

SVT

Question 1

L'acide pyruvique :

A - Est formé au cours du cycle de Krebs dans la mitochondrie.
B - Réagit avec l'acide citrique pour former l'acide oxaloacétique.
C - Réagit avec l'acide oxaloacétique pour former l'acide citrique.
D - Est transformé en acétyle coenzyme A dans la mitochondrie.
E - Est transformé en acide lactique dans la mitochondrie de la cellule humaine.

Question 2

Dans le cycle de Krebs, la transformation de l'acide malique en acide oxaloacétique nécessite l'intervention de l'enzyme.

A - Ligase.
B - Restriction.
C - Décarboxylase.
D - Désoxygénase.
E - Déshydrogénase.

Question 3

La couleur de la laine des moutons est contrôlée par deux allèles : B (couleur blanche) dominant, et b (couleur noire) récessif.
Dans une population de 900 individus dont 891 de phénotype blanc et 9 de phénotype noir, la fréquence des deux allèles B et b sont :

A - $p = 0{,}80$ et $q = 0{,}20$.
B - $p = 0{,}90$ et $q = 0{,}10$.
C - $p = 0{,}70$ et $q = 0{,}30$.
D - $p = 0{,}65$ et $q = 0{,}35$.
E - $p = 0{,}60$ et $q = 0{,}40$.

Scanné avec CamScanner

Question 4

Le croisement de souris de phénotypes jaune a donné une génération composée de 2/3 de souris de phénotype jaune et 1/3 de phénotype noir. Dans ce cas le gène responsable de la couleur des poils est :

A - Liée au sexe.

B - Non liée au sexe.

C - Un gène létal.

D - Est porté par le chromosome 21.

E - Est porté par le chromosome X.

Question 5

L'ARN est situé seulement au niveau de :

A - Le noyau.

B - Le cytoplasme.

C - Les ribosomes et le noyau.

D - L'hyaloplasme et le noyau.

E - Le noyau, l'hyaloplasme et le ribosome.

Question 6

L'hémophilie est une maladie résultante de :

A - Manque du pigment de mélanine.

B - Anémie.

C - Problème de coagulation du sang chez les femelles seulement.

D - Problème de coagulation du sang chez les hommes.

E - Une anomalie chromosomique.

Question 7

L'histone est :

A - Une substance nécessaire à la contraction musculaire.

B - Une protéine basique.

C - Une substance nécessaire à la phagocytose.

D - Protéine nucléaire.

E - Protéine constituant les ribosomes.

Question 8

Pour les fréquences génotypiques dans le cas d'un gène lié au sexe :

A - Les fréquences génotypiques des mâles et des femelles sont égales.

Scanné avec CamScanner

B - La fréquence des génotypes des mâles obéit à la loi de Hardy Weinberg.

C - La fréquence des allèles des femelles est égale à la fréquence des génotypes.

D - La fréquence des génotypes des femelles obéit à la loi de Hardy Weinberg.

E - La fréquence des allèles est la même chez les femelles et chez les mâles.

Question 9

Le brassage interchromosomique a lieu pendant :

A - La prophase I.

B - La télophase I.

C - L'anaphase II.

D - La prophase II.

E - L'anaphase I.

Question 10

L'actine est un polypeptide secrété par :

A - Les plaquettes sanguines.

B - Les globules blancs.

C - Les globules rouges.

D - Les mastocytes.

E - Les lymphocytes.

SVT

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	D	E	B	C	B	D	B	B	E	B

Scanné avec CamScanner

Examen 7 Faculté de Fès

Déterminer la réponse juste pour chaque proposition

Question 1

L'enzyme :

A - Est un glucide influence la vitesse des réactions biochimique.
B - Est une protéine influence la vitesse des réactions biochimiques.
C - Est une lipide entrant dans les constituants des membranes biologiques.
D - Glucide emmagasinant de l'énergie.
E - Protéine énergétique.

Question 2

L'une des étapes ci-dessous n'est pas une étape de la gamétogenèse :

A - Phase de différenciation.
B - Phase d'amplification.
C - Phase de maturation.
D - Phase de multiplication.
E - Phase de désintégration.

Question 3

Les globules rouges falciformes sont :

A - Des globules rouges normaux.
B - Des globules rouges mortes.
C - Des globules rouges des sujets atteints d'anémie.
D - Des globules rouges se multiplient rapidement dans certaines zones du monde.
E - Des globules rouges des cardiaques.

Question 4

Les mutations sont plusieurs types l'une des propositions ci-dessous est fausse. Laquelle :

A - La variation d'une base azotée.
B - Duplication d'un ancien gène.
C - Variation de la structure du chromosome.
D - Duplication des chromosomes.
E - Variation programmée d'un caractère génétique donné.

Question 5

L'acide pyruvique :

A - Est oxydé dans la mitochondrie.
B - Est oxydé dans le cytoplasme.
C - Est oxydé dans le noyau.
D - Est oxydé à l'extérieur de la cellule.

Scanné avec CamScanner

E. N'est jamais oxydé.

Question 6

Les individus d'une population :

A - Sont caractérisés par les mêmes phénotypes.
B - Sont très peu différents par leurs phénotypes.
C - Se reproduisent entre eux et avec les autres espèces.
D - Se reproduisent seulement entre eux.
E - Peuvent se reproduire entre eux.

Question 7

A partir d'une molécule d'ADN, on peut obtenir par :

A - Transcription une nouvelle molécule d'ADN.
B - Duplication une nouvelle molécule d'ARN.
C - Lecture, une protéine.
D - Lecture une molécule d'ARN.
E - Transcription une molécule d'ARN.

Question 8

L'immunité naturelle :

A - N'existe pas.
B - Est mécanique, biochimique et écologique.
C - Est tout type de vaccin.
D - N'existe pas chez les malades.

l'infiltration des microbes mais facilement leur reproduction.

Question 9

L'une des bases suivantes n'entre pas dans la construction d'ADN :

A - Thymine.
B - Cytosine.
C - Guanine.
D - Adénine.
E - Uracile.

Question 10

Les microbes sont :

A - La cause de boutes les maladies.
B - Une aide au système immunitaire.
C - Le moyen essentiel de la digestion chez l'Homme.
D - Des microorganismes vivants dans divers milieux.
E - La cause des tumeurs.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	B	E	C	E	A	D	A	B	E	D

SVT

Examen 8 Faculté de Fès

Déterminer la réponse juste pour chaque proposition

Question 1

L'origine de l'énergie dans la cellule est :
A - Glucides et lipides.
B - Glucides et protéines.
C - Protéines et lipides.
D - Glucides seulement.
E - Protéines seulement.

Question 2

L'un des être vivants ci-dessous ne produit pas de gamètes :
A - L'Homme.
B - Le maïs.
C - Les bactéries.
E - La drosophile.
E - La souris.

Question 3

L'information génétique est portée par :
A - Les peptides.
B - Les enzymes.
C - Les chromosomes.
D - Les ribosomes.
E - Toutes les molécules.

Question 4

Les protéines sont sécrétées par :
A - Le noyau – L'ergastoplasme – L'appareil de golgi – La membrane cytoplasmique.
B - L'ergastoplasme – La mitochondrie – Les vésicules sécrétrices – La membrane cytoplasmique.
C - L'ergastoplasme – L'appareil de golgi – Les vésicules sécrétrices – La membrane cytoplasmique.
D - L'appareil de golgi - Les vésicules sécrétrices – La membrane cytoplasmique.
E - L'ergastoplasme – Les vésicules sécrétrices – La membrane cytoplasmique.

Question 5

L'une des bases azotées ci-dessous ne se trouve que dans l'ARN :
A - Adénine.
B - Thymine.
C - Guanine.
D - Cytosine.

SVT

Scanné avec CamScanner

E - Uracile.

Question 6

L'un des scientifiques ci-dessous est connu par ses lois de transmission des caractères génétiques :

A - Mendel.
B - Merlan.
C - Watson.
D - Meselson.
E - Pavlovsky.

Question 7

La myosine est une protéine musculaire et elle est formée par une tige et :

A - Une tête.
B - 2 têtes.
C - 3 têtes.
D - 4 têtes.
E - 5 têtes

Question 8

La molécule d'ATP intervient dans :

A - La formation de la membrane cytoplasmique.
B - La division cellulaire.
C - La digestion intracellulaire.
D - La production d'ATP.
E - La synthèse des protéines.

Question 9

Le gènie génétique :

A - Est un moyen de production de tous les médicaments.
B - N'a aucune application en médecine.
C - N'est pas nécessaire dans le domaine médicale.
D - Permet la production d'insuline à l'aide de bactéries.

Question 10

Les anticorps :

A - Sont des molécule des naturellement présente dans le corps humain.
B - Sont formés dans le corps humain juste avant l'infiltration d'un microbe donné.
C - Sont formés juste après l'infiltration d'un microbe donné dans le corps humain.
D - Sont des organes de résistance contre les malades.
E - Sont des organites de résistance contre les malades.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponses	A	C	C	C	E	A	B	D	D	C

Scanné avec CamScanner

Examen 9 Faculté de Rabat

I- Déterminer la réponse juste pour chaque proposition :

Question 1

Pendant la respiration et à partir d'une molécule d'acide pyruvique il y a formation de :

A -20 ATP.

B -36 ATP.

C -15 ATP.

Question 2

Pendant la contraction musculaire, les ions Ca^{++} sont nécessaire à :

A -La production d'ADP.

B -La formation du complexe actomyosine.

C -La production d'ATP.

Question 3

L'oxydation totale de l'acide pyruvique au cours de la respiration à lieu dans :

A -Les ribosomes.

B -Le cytoplasme.

C -Les mitochondries.

Question 4

Le glycogène est une grande molécule de nature :

A -Protéique.

B -Glucidique.

C -Lipidique.

II - Répondre par vrai ou faux pour chaque proposition :

1 -La mutation de substitution est une perte d'un ou plusieurs nucléotides d'un fragment d'ADN.

2 -Un gène peut exister sous forme de deux allèles au niveau d'une paire de chromosomes homologues.

3 -A la fin de la division réductionnelle de la méiose, on obtient des cellules haploïdes (n) avec des chromatides.

4 -L'ADN se duplique selon le modèle semi conservatif pendant la phase S de l'interphase.

5 - Au cours de l'anaphase II les chromosomes sont formés de deux chromatides.

Scanné avec CamScanner

III- Déterminer les propositions justes et corriger celles qui sont fausses :

1 - Dans le cas de deux gènes liés, le croisement test (bake cross) donne une génération composée de deux phénotypes à pourcentages élevés et deux phénotypes recombinés.

2 - Le phénotype est l'ensemble des gènes.

3 - Dans le cas des mutations somatiques, la mutation est transmise à travers les générations.

4 - Le gène est porté par le chromosome X quand le caractère se transmet du père à ses filles et de la mère à ses fils.

5 - La formule chromosomique d'une personne atteinte du syndrome de Turner est 44A + XXY.

IV - Déterminer les propositions fausses :

1 - Les macrophages n'interviennent pas dans l'immunité spécifique.

2 - Les LT_8 se multipliant et se différencient en LTC.

3 - Le thymus est le lieu de maturation des LB.

4 - Les LB sont les seules monocytes présentatrices de l'antigène.

SVT

Réponses

I - La réponse juste :

Questions	1	2	3	4	5
Propositions justes	C	B	C	B	A

II - Vrai ou faux :

Questions	1	2	3	4	5
Vrai ou faux	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux

III- Les propositions justes et correction de celles qui sont fausses :

1 - Juste.

2 - Le phénotype est l'ensemble des allèles qui apparaissent chez l'individu.

3 - Dans le cas de mutations somatiques la mutation n'est pas transmise à travers les générations.

4 - Juste.

5 - La formule chromosomique d'une personne atteinte du syndrome de Klinefelter est : 44A + XXY.

IV- Les propositions fausses sont : 3 et 4.

Scanné avec CamScanner

Examen 10 Faculté de Casablanca

Déterminer la réponse fausse pour chaque proposition

Question 1

Le gène :

A - Est transcrit en ADN.
B - Est constitué d'une séquence nucléotidique.
C - Code pour une protéine.
D - Peut subir des mutations.

Question 2

L'ADN :

A - Est bicatenaire.
B - Est transcrit en ARN.
C - Porte plusieurs gènes.
D - Est formé de plusieurs acides aminés.

Question 3

L'ARN :

A - Intervient dans la synthèse des glucides.
B - Porte un site de fixation de l'acide aminé.
C - Porte un anticodon.
D - Porte trois boucles.

Question 4

Le ribosome :

A - Participe dans la synthèse des protéines.
B - Est formé de deux sous unités.
C - Est formé dans le nucléole.
D - Participe dans la duplication des gènes.

Question 5

L'ARN polymérase intervient dans :

A - La duplication de l'ADN.
B - La transcription de l'ADN.
C - La synthèse des protéines.
D - La liaison des nucléotides.

Question 6

L'insuline :

A - Est codé par un gène précis.
B - Est secrété par le pancréas.
C - Est constitué d'acides aminés.
D - Fait augmenter la glycémie.

Question 7

Au cours du cycle cellulaire :

A - La cellule se divise pendant l'interphase.
B - Le cytoplasme se divise.
C - Les chromosomes sont dupliqués.
D - La quantité d'ADN varie.

Question 8

Pendant la métaphase :

A - Le fuseau mitotique apparait.
B - Les chromosomes forment la plaque équatoriale.
C - La membrane nucléaire disparait.
D - Le nucléole est toujours présent.

Question 9

Le caryotype d'une cellule donnée :

A - Est toujours normal
B - Renferme des chromosomes sexuels.
C - Renferme des chromosomes autosomales.
D - Est l'ensemble des chromosomes d'une cellule.

Question 10

Le fuseau mitotique :

A - Facilite la ségrégation des chromosomes.
B - Permet la fixation des chromosomes.

Scanné avec CamScanner

C - Est présent dans le cytoplasme.
D - Disparaît à la prophase.

Question 11

Le spermatozoïde :

A -. Est haploïde.
B - Secréte la testostérone.
C - Passe par l'étape de spermatide.
D - Se forme dans le tube séminifère.

Question 12

La cellule de sertoli :

A - Est une cellule nourricière.
B - Est présente dans le tube séminifère.
C - Secréte le liquide folliculaire.
D - Est une cellule diploïde.

Question 13

L'ovaire est formé de :

A - Un tissu conjonctif.
B - Spermatogonies.
C - Follicules.
D - Ovogonies.

Question 14

Parmi les organes du système immunitaire :

A - La rate.
B - Le thymus.
C - Le foie.
D - Les ganglions lymphatiques.

Question 15

Parmi les moyens de l'immunité naturelle :

A - La peau.
B - Les vaisseaux sanguins.
C - Les muqueuses.
D - Le sueur.

Question 16

Le phagocyte :

A - Reconnait l'antibiotique

Scanné avec CamScanner

B - Peut phagocyter.
C - Secréte des anticorps.
D - Secrété l'interleukine.

Question 17

Les lymphocytes T :

A - Sont matures au niveau du thymus.
B - Sont différenciés en plasmocytes.
C - Sont différenciés en lymphocytes cytolytiques.
D - Portent des marqueurs CD_4 ou CD_8.

Question 18

Les lymphocytes T :

A - Sont cinq types.
B - Active le facteur du complément.
C - Porte plusieurs chaines lourdes.
D - Élimine l'antigène qui lui est relatif.

Question 19

Le VIH :

A - Attaque les LT.
B - Il est possible de le mettre en évidence dans L'urine.
C - Peut rester inactif sous forme latente dans le corps.
D - Est transmis par les seringues.

Question 20

Le vaccin :

A - Est utilisé contre des maladies dangereuses.
B - Active l'immunité spécifique.
C - Utilise les cellules mémoires.
D - Utilise des anatoxines.

Réponses

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Propositions fausses	A	D	A	D	E	A	B	D	D	C

Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Propositions fausses	B	C	B	C	B	C	B	B	B	C

Scanné avec CamScanner

Matière

Chimie

Les grandeurs physiques liées à la quantité de matière

La mole est l'unité de la quantité de matière (symbole : mol). **1 mol** correspond à $6{,}02 \times 10^{23}$ particules (nombre d'Avogadro. N_A).

Les grandeurs physiques liées à la quantité de matière	Les relations	Les unités
Le nombre N d'atome, de molécules ou d'ions contenus dans l'échantillon est proportionnel à la quantité de matière n correspondante. D'où la relation :	$n = \frac{N}{N_A}$	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$ n; (mol)
La masse m d'un échantillon d'une espèce chimique X et sa quantité de matière n sont reliées par la relation :	$n = \frac{m}{M}$	m : (g) M : ($g.mol^{-1}$)
La masse volumique ρ d'un corps est égale au quotient de sa masse m par son volume V.	$\rho = \frac{m}{V}$	m : (g ou Kg) V : (cm^3, L, m^3)
La relation **n**, **ρ** et **V**.	$n = \frac{\rho.V}{M}$	M : ($g.mol^{-1}$) n ; (mol) V : (cm^3, L, m^3)
La densité d d'un corps par rapport à l'eau est égale au quotient de la masse m de ce corps par la masse m0 d'un même volume V d'eau :	$d = \frac{m}{m_0}$	m : (g ou Kg)
La densité d d'un gaz par rapport à l'air, est égale au quotient de la masse m d'un volume V de gaz par la masse mair du même volume V d'air.	$d = \frac{M}{29}$	M : ($g.mol^{-1}$)
La concentration molaire C d'un soluté moléculaire X dissous dans une solution homogène est égale au quotient de la quantité n par le volume V de la solution.	$C = \frac{n}{V}$	n ; (mol) C : ($mol.L^{-1}$) V : (L)
A température constante, pour une quantité de matière donnée de gaz, le produit de la pression P par le volume V de ce gaz ne varie pas :	P.V = cte	V : (m^3) P : (Pa)
L'expérience montre que les quatre variables d'état (P, V, n, T) sont liées par une équation s'appelle **l'équation d'état des gaz parfait.**	P.V = n.R.T	T : (K) R : (SI)
La relation de la dilution :	$C_i.V_i = C_f.V_f$	C : ($mol.L^{-1}$) V : (L)
D'après la définition du volume molaire V_m, la quantité de matière n d'une espèce chimique est liée à son volume V par la relation :	$n = \frac{V}{V_m}$	V : (L) Vm : ($L.mol^{-1}$)

Tableau d'avancement :

Équation de la réaction		aA	+ bB	$\rightleftarrows$	cC	+ dD
État de système	Avancement	La quantités de matière (en mol)				
État Initial	0	$n_i(A)$	$n_i(B)$		0	0
État Intermédiare	x	$n_i(A) - a.x$	$n_i(B) - b.x$		$c.x$	$d.x$
État Final	x_{max}	$n_i(A) - a.x_{max}$	$ni(B) - b.x_{max}$		$c.x_{max}$	$d.x_{max}$

Chimie

Préparation aux concours : Rappel de cours

Chimie Organique

I Les Alcanes :

* **Formule générale :**

$C_n H_{2n+2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

CH_4	méthane	$C_6 H_{14}$	hexane
$C_2 H_6$	éthane	$C_7 H1_6$	heptane
$C_3 H_8$	propane	$C_8 H_{18}$	Octane
$C_4 H_{10}$	butane	$C_9 H_{20}$	nonane
$C_5 H_{12}$	pentane	$C_{10} H_{22}$	décane

* **Radicaux Alkyles :**

$C_n H_{2n+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

CH_3	méthyle	$C_2 H_5-$ ou CH_3-CH_2-	éthyle

C_3H_7	$CH_3-CH_2-CH_2-$ propyle	$C_4 H_9$	$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-$ butyle
	CH_3-CH- $\mid$ CH_3 isopropyle		$CH_3-CH-CH_2$ $\mid$ CH_3 isobutyle

II Les Alcools :

* **Formule générale :** $C_n H_{2n+2}-OH$ où $R-OH$

* **Nomenclature et classe :**

	Nom de l'alcool	Classe
$CH_3-CH-CH_3$ $\mid$ OH	propane -2-ol	Secondaire
C_2H_5 $\mid$ $CH_3-CH-C-CH_2-CH_3$ $\mid \quad \mid$ $CH_3 \; OH$	2 - méthyl - 3 - éthylpentan - 3 - ol	Tertiaire
CH_3-CH_2-OH	éthan – 1 – ol ou : éthanol	Primaire
$C_2H_5 \; CH_3$ $\mid \quad \mid$ $CH_3-CH-C-C_2H_5$ $\mid$ OH	3 – 4 dimethyl hexan – 3 - Ol	Tertiaire
$CH_2-CH-CH_2$ $\mid \quad \mid \quad \mid$ $OH \; OH \; OH$	propane – 1,2,3 – triol.	——

Scanné avec CamScanner

III Les Acides Carboxyliques :

- **Formule générale :** $R-C(=O)-OH$ ou RCOOH
- **Nomenclature :**

$CH_3-C(CH_3)_2-C(=O)-OH$	$CH_3-CH(C_2H_5)-C(=O)-OH$	$CH_3-C(=O)-OH$
acide – 2,2 – dimethyl propanoïque	acide – 2 – méthyl butanique	acide éthanoïque

IV Dérivés d'acides carboxyliques :

1. Chlorure d'Acyle ou chlorure d'Acide :

- **Formule générale :** Rcocl ou $R-C(=O)-Cl$
- **Préparation du chlorure d'acyle :**

$$\underset{\text{Acide carboxylique}}{R-C(=O)-OH} + \underset{\text{Chlorure de thionyle}}{SOCl_2} \rightarrow \underset{\text{Chlorure d'acyle}}{R-C(=O)-Cl} + HCl + SO_2$$

- **Nomenclature :**

$C_6H_5-C(=O)-Cl$	$CH_3-CH_2-C(=O)-Cl$	$H-C(=O)-Cl$
Chlorure de benzoyle	Chlorure de propanoyle	Chlorure de méthanoyle

2. Anhydride d'Acide :

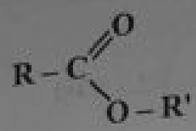
- **Formule générale :** $RCO-O-COR$ ou $R-C(=O)-O-C(=O)-R$
- **Nomenclature :**

$CH_3-C(=O)-O-C(=O)-CH_3$	$CH_3-CH(C_2H_5)-C(=O)-O-C(=O)-CH(C_2H_5)-CH_3$	$HCO-O-COH$
anhydride de propanoïque	anhydride -2,2-diméthylbutanoïque	anhydride de méthanoïque

Chimie

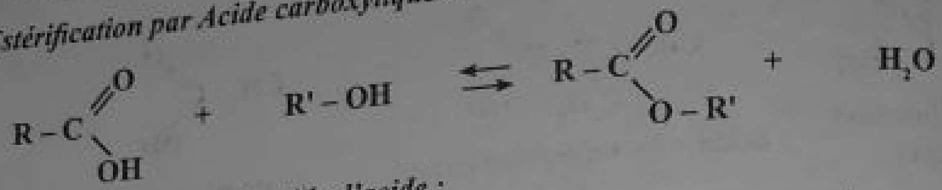
Scanné avec CamScanner

V Les Esters :

* Formule générale : RCOOR' ou  avec H ≠ R'

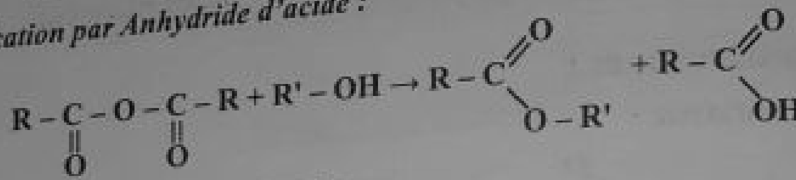
* Synthèse des esters :

1 . Estérification par Acide carboxylique :



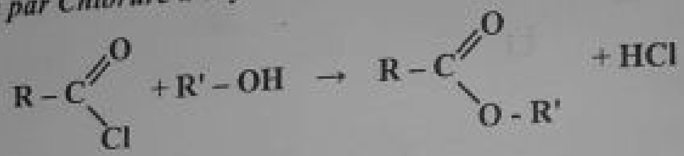
* Limitée
* Lente.

2 . Estérification par Anhydride d'acide :



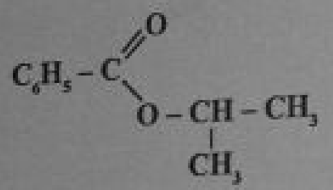
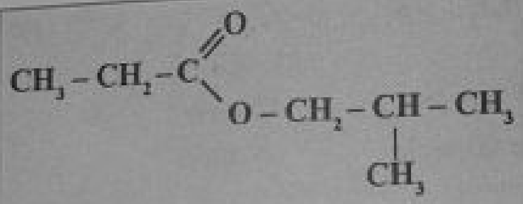
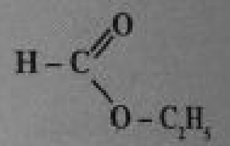
* Totale
* Rapide

3 . Estérification par Chlorure d'acyle :



* Totale
* Rapide

* Nomenclature :

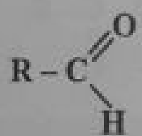
 benzoate de 1 - méthyléthyle	 popanoate de 2 - méthylpropyle	 méthanoate d'éthyle

* Saponification des esters : « **Hydrolyse basique** »

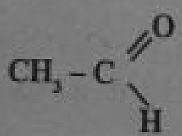
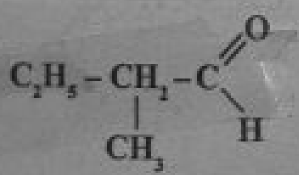
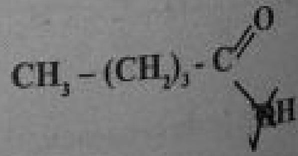
$$RCOOR'_{(aq)} + (Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}) \rightarrow (RCOO^-_{(aq)} + Na^+_{(aq)}) + R'OH_{(aq)}$$

* Totale
* Lente

VI Les Aldéhydes :

* Formule générale : RCHO ou 

* Nomenclature :

 éthanol	 2 - méthylbutanal	 pentanal

VII Les Cétones :

- **Formule générale :** RCOR' ou $R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R'$ avec R et R' ≠ H
- **Nomenclature :**

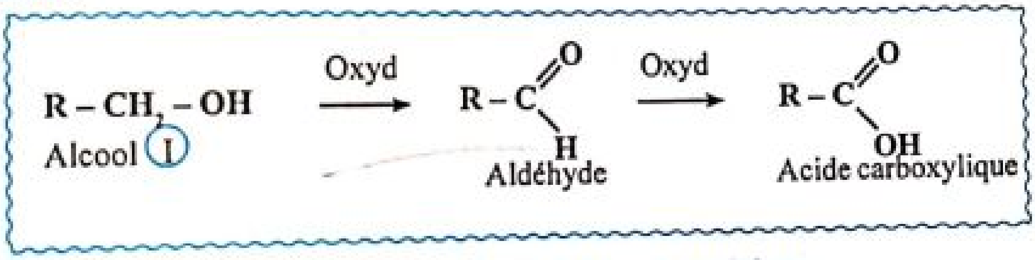
$CH_3-\underset{\underset{C_2H_5}{\mid}}{CH}-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$	$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{\mid}}{CH}-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_2-CH_2-CH_3$	$CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$
3- méthyl pentan -2- one	2 - méthyl-hexan -3- one	propanone

Remarque : On peut identifier les aldéhydes ou les cétones dans un milieu en utilisant les indicateurs suivants :

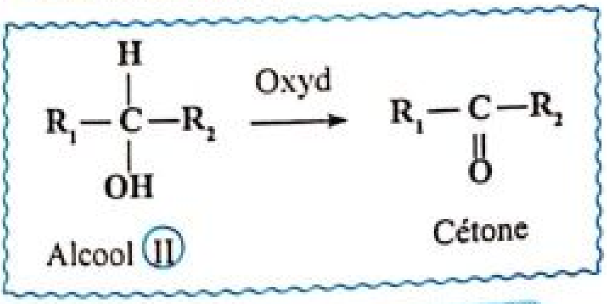
	Aldéhydes	Cétones
Solution « DNPH »	√	√
Liqueur de Fehling	√	—
Réactifs de TOLENS	√	—

VIII Oxydation ménagée des Alcools :

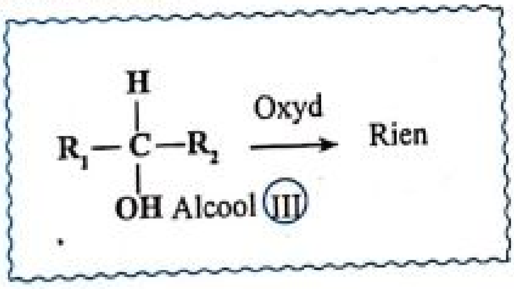
- **Alcools primaires :**



- **Alcools secondaires :**



- **Alcools tertiaires :**



IX Les Composés halogènes :

- **Formule générale :** R – X ou R – : Alkyle ; X – : Halogène ; **X** : peut être **F**, **Cl**, **Br** ou **I**
- **Nomenclature :**

$CH_3-(CH_2)_2-\underset{\underset{F}{\mid}}{CH}-C_2H_5$	$CH_3-\underset{\underset{I}{\mid}}{CH}-CH_2-CH_3$	$CH_3-\underset{\underset{Br}{\mid}}{CH}-\underset{\underset{Br}{\mid}}{CH_2}$	CH_3-CH_2-Cl
3- floro hexane	2 - Iodo butane	1 , 2 dibromo propane	1- chloro éthane

Scanné avec CamScanner

Remarque : On met en évidence un composé halog en ajoutant une solution du nitrate d'argent (Ag^+ , No_3^-) où on obtient un précipité d'halogénure d'Argent (Ag^+ , X^-)

X Les Amines :

Classe	Formule générale	Nomenclature
Amine primaire	$R-NH_2$	$CH_3-CH_2-NH_2$: éthanamine
Amine secondaire	R_1-NH-R_2	$CH_3-CH_2-NH-CH_3$: N – méthyléthanamine
Amine tertiaire	$R_1-N(R_3)-R_2$	$CH_3-N(C_3H_7)-C_2H_5$ N-éthyl N-méthyl popanamine

Remarque : « Les amines ont un caractère basique dans une solution aqueuse »

XI Les Amides :

(Dérivés d'acides carboxyliques) « Primaires »

	Formule générale	Nomenclature
Amide (I) Non substitué	$R-C(=O)-NH_2$	$CH_3-CH_2-C(=O)-NH_2$ Propanamide
Amide (I) Mono-substitué	$R-C(=O)-NH-R'$	$CH_3-C(=O)-NH-CH_3$ N-méthyléthanamide
Amide (I) di-substitué	$R-C(=O)-N(R'')-R'$	$H-C(=O)-N(C_2H_5)-CH_3$ N-éthyl N-méthyl méthamide

XII Les Alcènes :

* **Formule générale :** $R-X$ ou $R-$: Alkyle ; $X-$: Halogène ; X : peut être **F** , **Cl** , **Br** ou **I**
* **Nomenclature :**

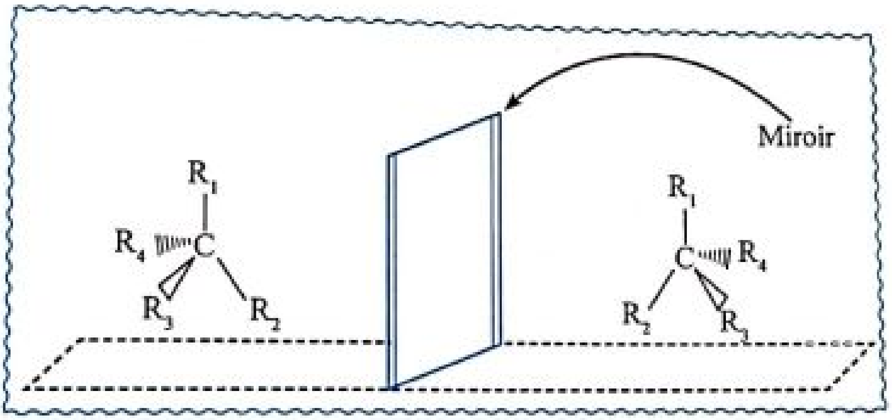
$CH_2=CH-CH_2-CH_3$ but -1- ène ou : butène	$CH_3-CH=C(CH_3)-CH_3$ 2- méthylbut -2- ène	$CH_2=CH_2$ éth -1- ène ou : éthène
$(CH_3)(H)C=C(H)(CH_3)$ (E) - but -2-ène	$CH_3-CH(CH_3)(H)C=C(C_2H_5)(H)$ (Z) -2-méthyle hex-3-ène	$(CH_3)(H)C=C(H)(C_2H_5)$ (E)-pent-2-ène

Scanné avec CamScanner

XIII Notions élémentaires de « Stéréochimie ».

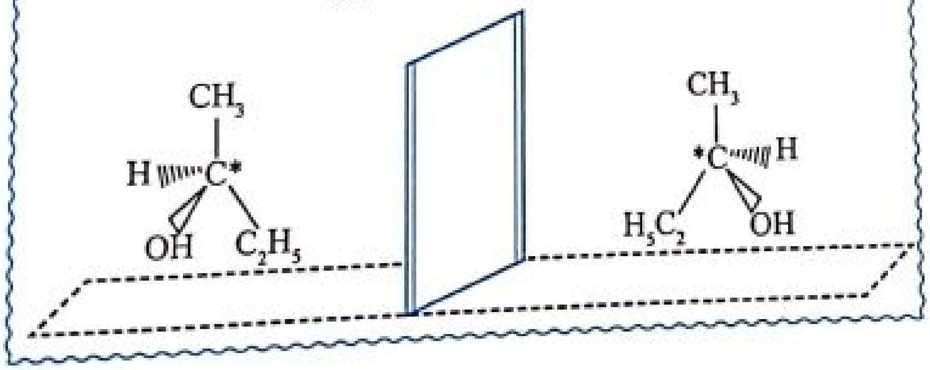
Carbone « Asymétrique »	Tout atome de carbone lié à 4 atomes on groupements d'atomes différents.
Molécule « Chirale »	Toute molécule possédant un C asymétrique, et qui optiquement active.

*** Enantiomérie :**



*** Exemple :**

*** Molécule :** $CH_3 - {}^{*}CH(OH) - CH_2 - CH_3$



Modèles de concours avec solutions

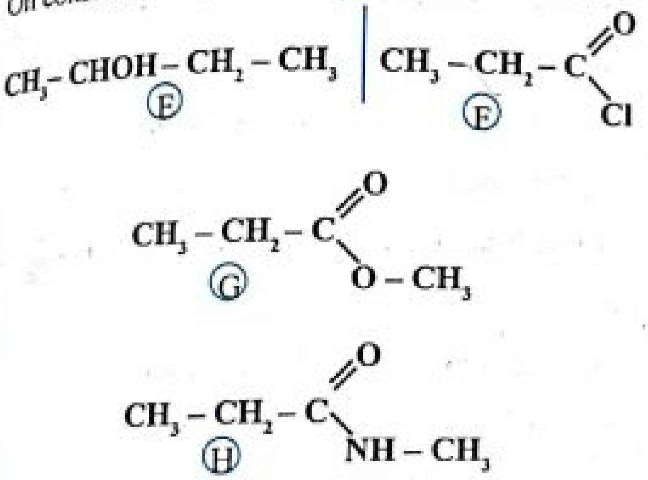
Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2017 – 2018

" Épreuve de Chimie "

Exercice 1

On considère les produits organiques suivants :



Entourer la bonne réponse dans la colonne-réponse à droite :

1 . Le nom du composé (E) est :

A - butan-2-ol B - butan-1-ol

C - propane-2-ol D - 2-méthyl-propane-2-ol

2 . Le nom du composé (F) est :

A - chlorure butanoyle B - chlorure propanoyle

C - propanal D - 1-chloro propanoïque

3 . Le nom du composé (G) est :

A - propanoate de méthyle

B - méthanoate de propyle

C - acide propanoïque

D - acide-2-méthyl propanoïque

4 . Le nom du composé (H) est :

A - N—méthyl-éthanamide

B - Propylamine

C - N-méthyle-propanamide

D - acide-2-méthyl propanoïque

5 . Lequel de ces composés (E) ; (F) ; (G) et (H) est optiquement actif :

A - (E) B - (F)

C - (G) D - (H)

6 . On oxyde le composé (E) avec une solution de permanganate de potassium KM_nO_4, on obtient un composé (I). La formule semi développée de (I) est:

A - $CH_3-CH_2-CH_2-CH_3$

B - $CH_3-CH_2-CH_2-COH$

C - $CH_3-CH_2-O-CH_2-CH_3$

D - $CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_2-CH_3$

7 . Le nom du composé (I) est :

A - acide butanoïque B - butan-2-one

C - butanal D - butane

8 . Le composé (F) réagit avec un alcool (J), on obtient le composé (G) et le chlorure d'hydrogène HCl. La formule semi développée de (J) est :

A - CH_3-CH_2OH B- CH_3-OH

C - CH_3-CHOH-CH_3 D- CH_3-CH_3

9 . Le composé (F) réagit avec une amine primaire, on obtient le composé (H) et du chlorure d'hydrogène. L'amine primaire est :9)

A - CH_3-CH_2-NH_2 B - $(CH_3)_2$CH-NH

C - CH_3-NH_2 D - CH_3-NH-CH_3

Chimie

10) Le nom de l'amine primaire est :

A - éthylamine B - N-méthylpropylamine

C - Diéthylamine D - méthylamine

Colonne-réponse

1.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D
5.	A	B	C	D
6.	A	B	C	D
7.	A	B	C	D
8.	A	B	C	D
9.	A	B	C	D
10.	A	B	C	D

Exercice 2

Pour synthétiser un ester X, on fait réagir n_1 mol d'acide éthanoïque et n_2 mol de propan-1-ol ; dans son état d'équilibre le système de volume V, contient $n_{1éq} = 0,2$ mol d'acide éthanoïque, $n_{2éq} = 0,1$ mol de propane-1-ol, $n_{3éq} = 0,3$ mol d'ester et $n_{4éq} = 0,3$ mol d'eau.

Les réponses justes doivent être entourées dans la colonne-réponse à droite.

1. Le nom de l'ester X est :

A - éthanoate de propyle

B - propanoate d'éthyle

C - éthanoate d'éthyle

D- propanoate de propyle

2. La constante d'équilibre de cette réaction est :

A - $K = 3$ B - $K = 1,4$

C - $K = 4,5$ D - $K = 5,4$

3. En utilisant un tableau d'avancement, la valeur de n_1 est :

A - $n_1 = 0,5$ mol B - $n_1 = 0,11$ mol

C - $n_1 = 0,4$ mol D - $n_1 = 0,3$ mol

4. En utilisant un tableau d'avancement, la valeur de n_1 est :

A - $n_2 = 0,5$ mol B - $n_2 = 0,11$ mol

C - $n_2 = 0,21$ mol D - $n_2 = 0,4$ mol

5. Le rendement de cette synthèse est :

A - $\rho = 50\%$ B - $\rho = 75\%$

C - $\rho = 25\%$ D - $\rho = 15\%$

1.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D
5.	A	B	C	D
6.	A	B	C	D
7.	A	B	C	D
8.	A	B	C	D
9.	A	B	C	D
10.	A	B	C	D

Chimie

Solutions

Exercice 1

1 .Bonne réponse : (A)

2 .La bonne réponse est : (B)

3 .La bonne réponse : (A)

4 .La bonne réponse est : (C)

5 .La molécule chirale est : (E)

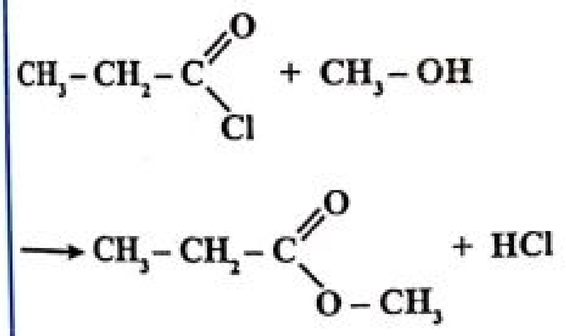
6 .La bonne réponse est : (D)

Car l'oxydation d'un alcool secondaire conduit à la formation d'un cytone.

7 .La bonne réponse est : (B)

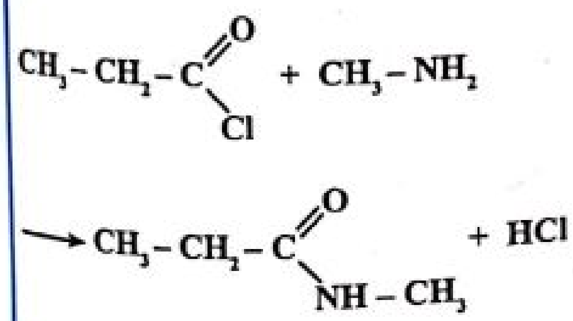
8 .La bonne réponse est : (B)

Car :



9 .La bonne réponse est : (C)

Car :

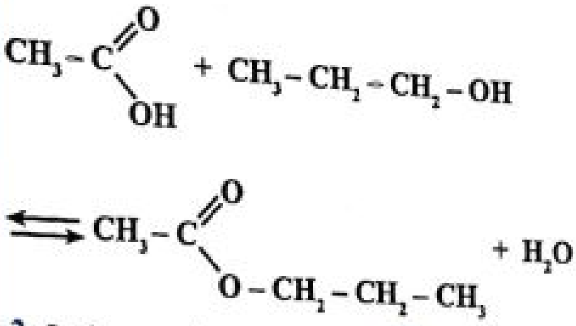


10 .La bonne réponse est : (D)

Exercice 2

1 .La bonne réponse est : (A).

Car :



2 .La bonne réponse est : (C)

Car : $K = \dfrac{[E]\,[H_2O]}{[AC]\,[Al]} = \dfrac{n_{4éq}\,.n_{3éq}}{n_{1éq}\,.\,n_{2éq}} = 4{,}5$

3 .La bonne réponse est : (A)

$n_{éq1} = n_1 - x_{éq}$

$n_1 = n_{éq1} + x_{éq} = 0{,}2 + 0{,}3$

Donc : $\boxed{n_1 = 0{,}5 \text{ mol}}$

4 .La bonne réponse est : (D).

De même : $n_2 = n_{2éq} + x_{éq}$

$n_2 = 0{,}1 + 0{,}3$

$\boxed{= 0{,}4 \text{ mol}}$

5 .Rendement de la synthèse :

La bonne réponse est : (B)

Car : $n = \dfrac{n_{exp}(E)}{nth(E)} \times 100$

$n = \dfrac{n_{éq}}{xmax} \times 100$

$= \dfrac{0{,}3}{0{,}4} \times 100$

$\boxed{= 75\%.}$

Chimie

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2016 – 2017

" Épreuve de Chimie "

Exercice 1

On dispose de trois solutions ci 25°C ; on donne : $Ke = 10^{-14}$.

S_1 : Solution aqueuse de méthylamine CH_3NH_2 de concentration $C = 10^{-2}$ mol L^{-1} ; pH = 11,3

S_2 : Solution aqueuse d'acide méthanoïque de concentration : $C = 10^{-2}$ mol L^{-1}.

S_3 : Solution aqueuse d'hydroxyde de sodium dont la concentration : $C_3 = 10^{-2}$ mol L^{-1}.

1 . Montrer que méthylamine CH_3NH_2 est une base faible.

2 . Calculer pK_{A1} associé au couple : acide / CH_3NH_2

On donne : $10^{-2,7} = 2.10^{-3}$ et $\log 4 = 0,6$

3 . On mélange un volume V_1 = 10ml de S_1 et un volume V_2 = 30ml de S_2.

a - Comparer pK_{A1}(acide / CH_3NH_2) et pK_{A2} (HCOOH / HCOO-) = 3,74.

b - Ecrire en justifiant l'équation bilan dans ce mélange.

c - On considérant que cette réaction est totale.

Calculer la concentration en ions méthanoate dans le mélange.

4 . On dose en utilisant la solution S_3 un volume V = 90ml d'une acidifiée par chlorure d'hydrogène. On obtient l'équivalence après l'ajout de 10ml de la solution S_3 :

a - Calculer la concentration en ions H_3O^+

b - Calculer le pH de cette solution.

Exercice 2

1. Nommer les composées suivantes :

A - .... $CH_3-CH_2-CH_2-Br$

B - .... $CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_2-Cl$

C - .... $CH_3-\underset{\displaystyle O}{\underset{\|}{C}}-CH_3$

D - .... $CH_3-CH=CHNH_2$

E - .... $CH_3-CH=CH_2$

2 . Nommer l'isomérie du composé (B)

3 . Représenter dans l'espace les deux énantiomères du composé (B).

4 . On fait réagir le permangonate de potassium KM_nO_4 avec le composé (B). Ecrire l'équation de cette réaction.

5 . L'un des composés présente une isomérie géométrique, lequel ? ....

Justifié votre réponse ? ....

6 . Donner et nommer ces deux isomères.

Scanné avec CamScanner

Solutions

Exercice 1

1 . L'équation de la .... réaction de la base CH_3NH_2 avec l'eau :

$$CH_3NH_2 + H_2O \rightleftharpoons CH_3NH_3^+ + HO^-$$

$$[HO^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = Ke.10^{pH} = 2.10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

Comme $[HO^-] < C_1$ dons la base CH_3NH_2 est une base faible (c'est-à-dire : $\tau < 1$).

2 . On a : $KA\ (CH_3NH_3^+ / CH_3NH_2)$

$$= \frac{[CH_3NH_2]_{éq} . [H_3O^+]_{éq}}{[CH3NH_3^+]}$$

$$K_A = \frac{(C_1 - [HO^-]_{éq})\ [H_3O^+]_{éq}}{[HO^-]_{éq}}$$

$$K_A = \frac{C_1 . 10^{-pH} - Ke}{[HO^-]_{éq}} = \frac{10^{-2} \times 10^{-11,3} - 10^{-14}}{2.10^{-3}}$$

$K_A = 2.10^{-11}$

$pK_{A1} = -\log K_A = 10,7$

3 . a - On a : $pK_{A1} = 10,7$

$pK_{A2} = 3,74$

Donc : $\boxed{pK_{A1} > pK_{A2}}$

b - Equation de la réaction :

$$CH_3NH_2 + HCOOH \rightarrow CH_3NH_3^+ + HCOO^-$$

c - On a : $[HCOO^-] = \frac{x_{max}}{Vs}$

C'est : $[HCOO^-] = \frac{C_1V_1}{V_1+V_2} = 2,5.10\text{-}3\ mol.L\text{-}1$

4 . a - A l'équivalence on a : $[H_3O^+].V = C_3V_3$

$$[H_3O^+] = \frac{C_3V_3}{V} = \frac{10^{-2} \times 10}{90}$$

$[H_3O^+] = 1,11 . 10^{-3}\ mol.L^{-1}$

b - On a : $pH = -\log [H_3O^+]$

C'est-à-dire : $\boxed{PH = 2,95}$

Exercice 2

1 . (A) : Bromopropane

(B) : Chloropropane-2-Ol

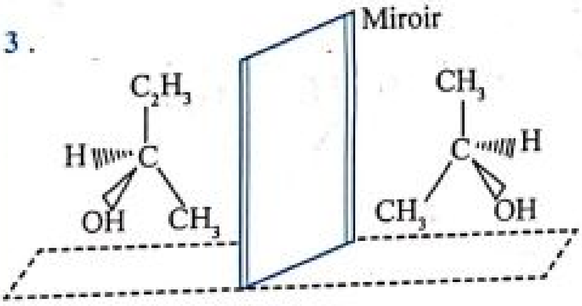
(C) : Propanone

(D) : Aminoprop-1-ène

(E) : prop-1-ène

2 . Le composé (B) possède une isomérie optique (deux énantiomères)

3 .



4 . $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+} + 4\ H_2O$

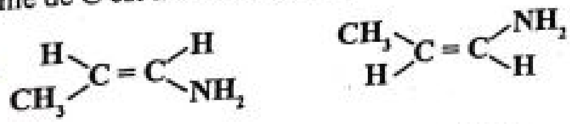
$$CH_3\text{–}\underset{\substack{|\\OH}}{CH}\text{–}CH_2\text{–}Cl \rightleftharpoons CH_3\text{–}\underset{\substack{\|\\O}}{C}\text{–}CH_2\text{–}Cl + 2H^+ + 2e^-$$

$$2\ MnO_4^- + 5\ CH_3 - \underset{\substack{|\\OH}}{CH} - CH_2 - Cl + 6H^+$$

$$\longrightarrow 2Mn^{2+} + 5\ CH_3 - \underset{\substack{\|\\O}}{C} - CH_2 - Cl + 8\ H_2O$$

5 . Le composé (D) possédant une isomérie (Z) et (E) car il contient une liaison C = C, où chaque atome de C est lié à deux groupement différents.

6 .



(Z) – aminoprop-1-ène (E) – aminoprop-1-ène

Chimie

Concours d'accès 2015 – 2016

" Épreuve de Chimie "

Exercice 1

Pour faire la synthèse de l'ammoniac NH_3 gaz : on fait réagir 0,1 mol de diazote N_2 et 0,3 mol de dihydrogène H_2.

L'avancement final de la réaction égal 0,04 mol.

1. Ecrire l'équation de cette réaction.
2. Calculer l'avancement maximal de cette réaction.
3. Calculer le taux d'avancement final.
4. Expliquer le résultat obtenu.
5. Donner la composition du mélange à l'état final.

Exercice 2

On dispose de trois solutions A, B et C dont le pH respectivement :

pHA = 3.9 ; pHB = 6,8 ; pHC = 11,2.

Associer sans calcul à chaque solution les valeurs de la concentration en ions oxonium : $6,3.10^{-12}$; $1,3.10^{-4}$; $1,6.10^{-7}$.

$[H_3O^+]_A$ = ...

$[H_3O^+]_B$ = ...

$[H_3O^+]_C$ = ...

Exercice 3

Parmi les couples suivant, entoure les couples OX / Red :

O_2 / H_2O ; NH_4^+ / NH_3 ; MnO_4^- / Mn^{2+}

$CH_3CO_2H / CH_3CO_2^-$; Fe^{3+} / Fe^{2+}

Exercice 4

On fait l'hydrolyse de 0,28 mol de l'ester $C_3H_7COOC_2H_5$ avec 0,42 mol d'eau. A l'état final on obtient deux composés X et Y.

A l'état final, on obtient 0,14 mol de X dont la masse molaire : M = 88 g.mol-1.

On donne : $M(C) = 12\ g.mol^{-1}$; $M(H) = 1\ g.mol^{-1}$; $M(O) = 16\ g.mol^{-1}$;

Entourer la bonne réponse dans la colonne-réponse a droite :

1. Le nom de l'ester $C_3H_7COOC_2H_5$ est :

A - butanoate d'éthyle

B - éthanoate de propyle

C - propanoate d'éthyle

D - butanoate de méthyle

2. La nature de X et Y est :

A - ($X = C_2H_5COOH$ et $Y = C_2H_5OH$)

B - ($X = C_3H_7COOH$ et $Y = C_2H_5OH$)

C - ($X = C_2H_5COOH$ et $Y = C_3H_7OH$)

D - ($X = C_2H_5COOH$ et $Y = C_3H_8OH$)

3. La quantité de matière de Y en mol est :

A - 0,28 B - 0,014

C - 0,14 D - 0,2

4. La constante d'équilibre est :

A - 0,25 B - 1

C - 0,14 D - 0,5

5. Le rendement de l'hydrolyse est :

A - 60% B - 65%

C - 40% D - 50%

Colonne-réponse

1.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D
5.	A	B	C	D

Chimie

Solutions

Exercice 1

1 . Équation de la réaction chimique :

$$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$$

2 . Avancement maximal : x_{max}

Équation chimique		$N_2 + 3H_2 \rightarrow NH_3$		
Etat	Avancement	Quantité de matière		
t = 0	0	0,1	0,3	0
tf	x_{max}	$0,1 - x_{max}$	$0,3 - 3x_{max}$	x_{max}

Donc l'avancement maximal vaut : $x_{max} = 0,1$ mol.

3 . Taux d'avancement : $\tau = \frac{xf}{x_{max}} = \frac{0,04}{0,1} = 0,4$

4 . Comme $\tau < 1$ donc la transformation chimique étudiée est limitée.

5 . Composition du mélange à l'état final :

$n_f(N_2) = 0,1 - 0,04 = 0,06$ mol.

$n_f(N_2) = 0,3 - 3 \times 0,04 = 0,18$ mol

$\boxed{n_f(NH_3) = 0,04 \text{ mol}}$

Exercice 2

1 . Plus que le pH de la solution augmente plus la concentration en ions oxonium diminue, donc :

$[H_3O+]_A = 1,3.10^{-4}$ mol.L^{-1}

$[H_3O+]_B = 1,6.10^{-7}$ mol.L^{-1}

$[H_3O+]_C = 6,3.10^{-11}$ mol.L^{-1}

Exercice 3

Les couples Ox / Red sont :

O_2 / H_2O ; MnO^{4-} / Mn^{2+} ; Fe^{3+} / Fe^{2+}

Exercice 4

1 . Réponse : (A)

2 . Réponse : (B)

3 . Réponse : (C)

Car : $n_f(x) = n_f(y) = 0,14$

4 . Réponse : (D)

Car : $K = \frac{[X]\,[Y]}{[E]\,[H_2O]} = \frac{0,14 \times 0,14}{(0,28 - 0,14)\,(0,42 - 0,14)}$

$\boxed{K = 0,5}$

5 . Réponse : (D)

Car : $r = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{0,14}{0,28}$

$r = 0,5 = \boxed{50\%}$

Chimie

Scanné avec CamScanner

Exercice 1

On prépare deux solutions à 25°C, S_1 et S_2 de même concentration $C = 10^{-2}$ mol.L^{-1}.

S_1, Solution aqueuse d'acide iodhydrique HI dont pH = 2 et S_2 d'acide méthanoïque HCOOH dont pH = 3.

1 . Montrer que HI est un acide fort.

2 . Ecrire l'équation de sa dissociation dans l'eau.

3 . Montrer que HCOOH est un acide faible.

4 . Ecrire l'équation de sa dissociation dans l'eau.

5 . Calculer x le coefficient de dissociation d'acide méthanoïque dans l'eau.

Exercice 2

On dispose d'une amine (A) de formule brute : C_3H_9N.

Trouver les formules semi-développées de cette amine en précisant le nom et la classe.

Formule semi-développée	Le nom	La classe

Exercice 3

On fait réagir l'acide éthanoïque CH_3COOH et le méthanol CH_3OH ;

La composition initiale du mélange est 0,1 mol. à l'état final on obtient 5.10-2 mol d'ester.

1 . Ecrire l'équation de cette réaction.

2 . Nommer cette réaction.

3 . Donner ces caractéristiques.

4 . Donner l'expression de la constante d'équilibre associée à cette réaction. Calculer sa valeur.

5 . Donner l'expression du rendement de cette réaction. Calculer sa valeur.

6 . Proposer une méthode pour améliorer ce rendement.

Scanné avec CamScanner

Solutions

Exercice 1

1 - On a : $[H_3O^+] = 10^{-pH}$

$$= 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

Comme $[H_3O^+] = C$

Donc l'acide HI est un acide fort.

2 - Équation de dissociation de HI dans l'eau :

$$HI + H_2O \rightarrow I^- + H_3O^+$$

3 - Pour l'acide méthanoïque dont le pH = 3 ; on a:

$[H_3O^+] = 10^{-3}\ mol.L^{-1} < C$

4 - $HCOOH + H_2O \rightleftharpoons HCOO^- + H_3O^+$

5 - Coefficient de dissociation :

$$\alpha = \tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}1.$$

Formule semi-développée	Le nom	La classe
$CH_3-CH_2-CH_2-NH_2$	Propanamine ou propan-1-amine	Primaire
$CH_3-CH(NH_2)-CH_3$	Propan-2-amine	Primaire
$CH_3-NH-CH_2-CH_3$	N-méthyléthanamine (Ou N-méthyléthylamine)	Secondaire
$CH_3-N(CH_3)-CH_3$	N, N-diméthylméthan-amine Ou (triméthylamine)	Tertiaire

Exercice 2

1 - Équation de la réaction :

$$CH_3-C(=O)-OH + CH_3-OH \rightleftharpoons CH_3-C(=O)-O-CH_3 + H_2O$$

2 - Nom de » la réaction : Estérification.

3 - Caractéristique :

* Lente.
* Limitée.
* Athermique.

4 - Constante d'équilibre :

$$K = \frac{[E]_{éq} \cdot [H_2O]_{éq}}{[AC]_{éq} \cdot [Al]_{éq}}$$

$$K = \frac{5.10^{-2} \times 5.10^{-2}}{(0{,}1 - 5.10^{-2})\,(0{,}1 - 5.10^{-2})}$$

$K = 1.$

5 - Rendement de la réaction d'estérification :

$$r = \frac{n_{exp}(E)}{n_{th}(E)} \times 100$$

$$= \frac{5.10^{-2}}{0{,}1} \times 100$$

$\boxed{r = 50\%}$

6 - Pour améliorer ce rendement, on peut utiliser l'un des réactif en excès.

Scanné avec CamScanner

concours d'accès :
Médecine 2013

→ dispo sur le
drive

page 292

Scanné avec CamScanner

Correction concours d'accès 2013

Solutions

Exercice 1

1 . Équation de la réaction d'acide benzoïque avec l'eau :

$$C_6H_5CO_2H + H_2O \rightleftarrows C_6H_5CO_2^- + H_3O^+$$

2 . Les deux couples acide-base :

$$C_6H_5CO_2H / C_6H_5CO_2^- \; ; \; H_3O^+ / H_2O$$

3 . Le taux d'avancement final de la réaction :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[H_3O^+]_f \cdot V}{C \cdot V} = \frac{[H_3O^+]_f}{C} = \frac{10^{-pH}}{C}$$

A.N : $\tau = \frac{10^{-2}}{10^{-2}} = 1$

4 . Comme : $\tau = 1$; donc la réaction étudiée est totale.

Exercice 2

1 . Formule brute : $M(C_nH_{2n+2}O) = 74$

Donc : $12n + 2n + 2 + 16 = 74$

$14n = 56$

$\boxed{n = 4}$

Donc la formule brute de cet alcool est : $C_4H_{10}O$

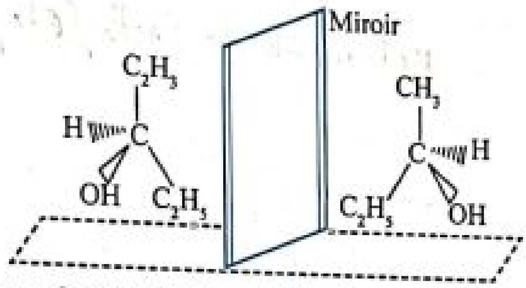
2 . Formules semi-développées :

Isomères	Les noms
$CH_3\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH\text{-}OH$	butanol
$CH_3-C(CH_3)(OH)-CH_3$	2-méthypropan-2-ol
$CH_3-CH_2-CH(OH)-CH_3$	butan-2-ol

3 . Isomère : butan-2-ol

- Sa classe : secondaire

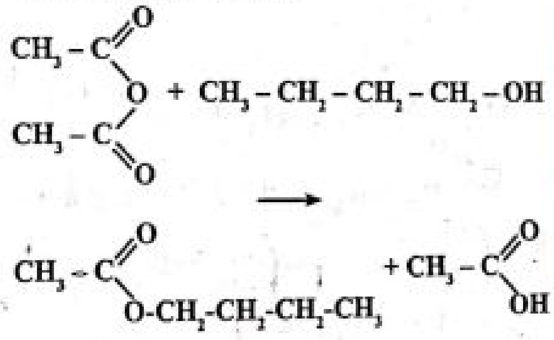
- Les deux énantiomères :



Formule semi-développé de la cétone obtenue :

$$CH_3-CH_2-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$$

Équation de la réaction :



- Constante d'équilibre :

$$K = \frac{[E]_{éq} \cdot [AC]_{éq}}{[AN]_{éq} \cdot [Al]_{éq}}$$

$$\text{Ou : } K = \frac{[C_6H_{12}O_2]_{éq} \cdot [C_2H_4O_2]_{éq}}{[C_4H_6O_3]_{éq} \cdot [C_4H_{10}O]_{éq}}$$

- Rendement de la synthèse :

$$r = \frac{m_{exp}(E)}{m_{th}(E)} \times 100$$

Avec : $m_{exp}(E) = m'' = 11,6$ g.

$m_{th}(E) = n_{th}(E) \cdot M(E)$

$= x_{max} \cdot M(E)$

$= 0,2 \times 116$

$= 23,2$

Donc : $r = \frac{11,6}{23,2} \times 100$

$\boxed{r = 50\%}$

Chimie

Concours d'accès
2011
Médecine "casa"

→ dispo sur le drive

p 294

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2011 Casa

Solutions

Exercice 1

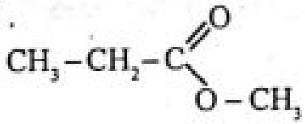
1 . Formule brute :

On a : $M(C_nH_{2n}O_2) = 88$

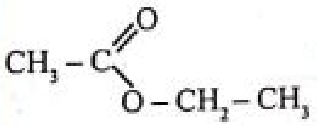
Donc : $12n + 2n + 32 = 88$

C'est-à-dire : n = 4 don $C_4H_8O_2$

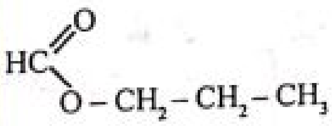
2 .



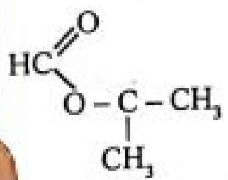
Propanoate de méthyle.



Ethanoate d'éthyle

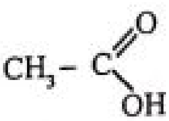


Méthanoate de propyle

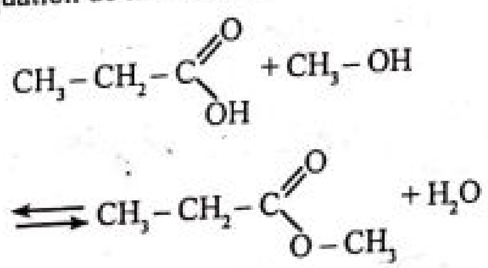


Méthanoate de -1-méthylethyle

3 . Acide éthanoïque :



4 . Equation de la réaction :



- Expression de la constante d'équilibre :

$$K = \frac{[E]_{éq} \cdot [H_2O]_{éq}}{[AC]_{éq} \cdot [Al]_{éq}}$$

- Composition du mélange à l'équilibre :

$n_f(E) = 0,4$ mol

$n_f(H_2O) = 0,4$ mol

$n_f(AC) = 1,2 - 0,4 = 0,8$ mol

$n_f(Al) = 0,5 - 0,4 = 0,1$ mol

- Calcul de la constante d'équilibre K :

$$K = \frac{0,4 \times 0,4}{0,8 \times 0,1} = 2$$

- Calcul du rendement :

$$r = \frac{n_{exp}(E)}{n_{th}(E)} \times 100 = \frac{0,4}{0,5} \times 100$$

$\boxed{r = 80\%}$

Exercice 2

* B : 3-Chloro-2-méthylpentane

C : 2-méthybutan-1-Ol

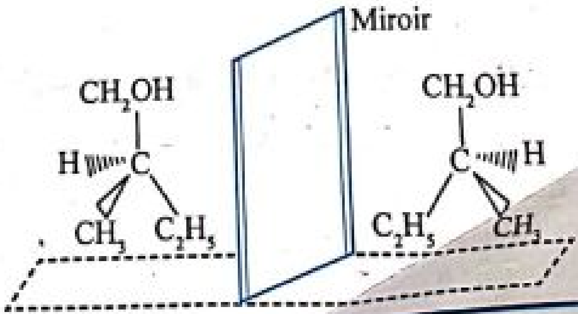
D : acide propanoïque

E : 2-bromo-3-méthylbutanol

* La molécule qui ne présente pas d'isomérie optique est : D

Justification : car cette molécule ne possède pas carbone asymétrique.

* les deux isomères du composé (C)



Chimie

Concours d'accès 2010
Médecine "Casa"

→ dispo sur le drive

{20/20} p296

Scanné avec CamScanner

Correction : concours d'accès 2010 Médecine

Solutions

Exercice 1

1. Le nom de chaque composé :

A : éthan-1-Ol

B : éthylamine

C : acide propanoïque

D : Chlorure de propanoyle

E : éthanol.

2.

2.1. Equation de la réaction :

$$CH_3-CH_2-C(=O)-OH + CH_3-CH_2-OH \rightleftharpoons CH_3-CH_2-C(=O)-O-CH_2-CH_3 + H_2O$$

2.2. Nom du composé F : propanoate d'éthyle.

- Nom du groupement fonctionnel :

Groupe carboxyle.

3.1. Le composé : D

3.2. Équation de la réaction :

$$CH_3-CH_2-C(=O)-Cl + CH_3-CH_2-OH \longrightarrow CH_3-CH_2-C(=O)-O-CH_2-CH_3 + HCl$$

4.1- Les deux demi-équations :

- Réduction de MnO_4^- :

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+} + 4H_2O$$

- Oxydation du composé E :

4.2- Équation bilan :

$$2MnO_4^- + 5CH_3-C(=O)-H + 6H^+ \longrightarrow 2Mn^{2+} + 5CH_3-C(=O)-OH + 3H_2O$$

Nom du composé (G) : acide éthanoïque.

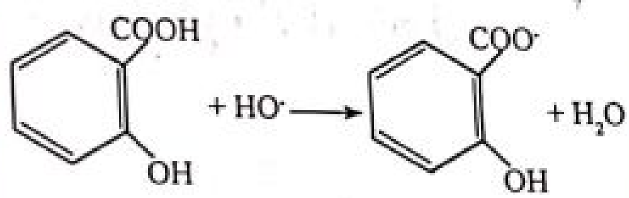
Problème :

1. Les fonctions : - Hydroxyle

- Carboxyle

2. Hydroxyde de sodium.

3.1. Équation de la réaction :



3.2. Calcul de concentration :

D'après la relation d'équivalence :

$C_A V_A = C \cdot V_T$

$C_A = \dfrac{C.V_T}{V_A}$

A.N : $C_A = 0{,}01$ mol.L-1

3.3. Concentration massique : Cm

On sait que : $Cm = M.C_A$

$Cm = 138 \times 0{,}01$

$\boxed{Cm = 1{,}38\ g.L^{-1}}$

Chimie

Concours d'accès 2009
Médecine casa

→ dispo sur le drive

20/20 → page 298

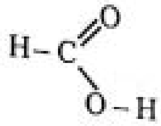
Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2010 "Casa"

Solutions

Problème :

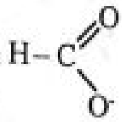
1 . Acide méthanoïque :



2 . L'acide méthanoïque est un acide faible, car :

$$\tau = \frac{10^{-pH}}{C} = 0,126 < 1$$

3 . Base conjuguée d'acide méthanoïque :

$HCOOH^+$ Ou 

4.1 . Équation de la réaction :

$$HCOO^- + HO^- \longrightarrow HCOO^- + H_2O.$$

4.2 . D'après la relation d'équivalence :

$$C\,V_{eq} = C'\,V'$$

$$V_{eq} = \frac{C'\,V'}{C} = V' = 40 \text{ mL}.$$

4.3. Pour que pH = pKa il faut ajouter un volume: $V = \frac{V_{éq}}{2} = 20$ mL de la solution d'hydroxyde de sodium.

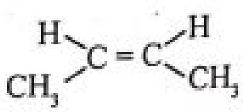
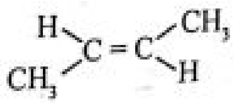
4.4 . La solution obtenue est appelée : Solution tampon.

4.5 . Le pH d'une solution tampon vrai très peu avec la dilution.

Exercice

1 . Isomérie de position.

2 . Les deux stéréoisoméres du composé (B).

 et 

(Z)-but-2-ène (E) -but-2-ène

Chimie

20/20 → page 300

\+ concours d'accès 2008
Médecine "casa"

→ dispo sur le drive

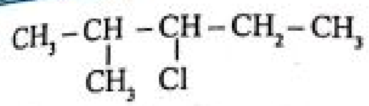
Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2008 " Casa "

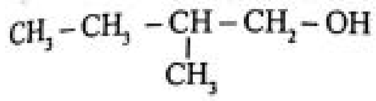
Solutions

Exercice 1

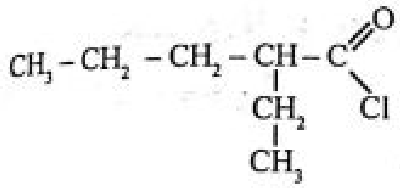
1.



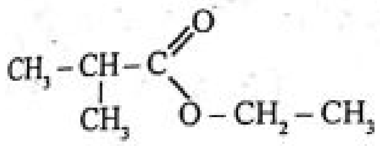
2.



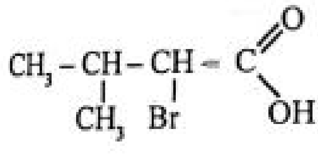
3.



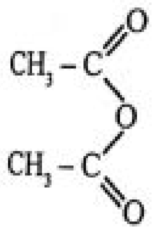
4.



5.



6.



Exercice 2

1. $M(C_nH_{2n}O_2) = 74$

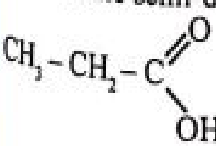
$12n + 2n + 32 = 74$

$14n = 42$

$n = \frac{42}{14}$

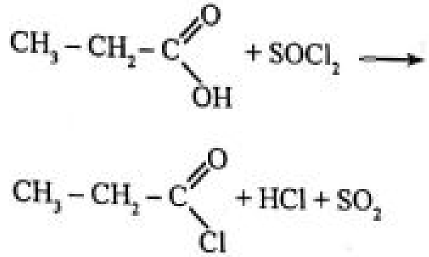
$n = 3$

2. Formule semi-développé du A :



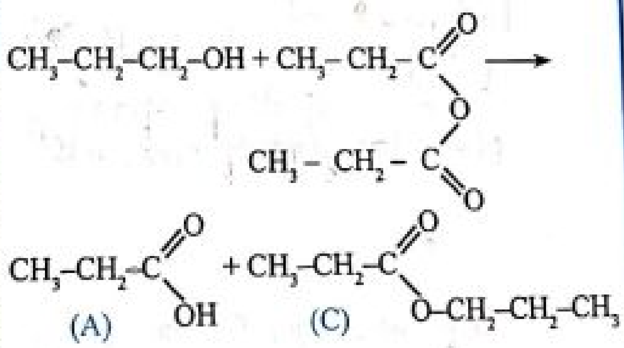
Acide ~~butanoïque~~

3. a - Équation de la réaction :



b - Nom du composé (B) :Chlorure de propanoyle.

4. a - Équation de la réaction :



b - Le nom du composé (C) :propanoate d'éthyle.

Exercice 2

1. D'après la relation de dilution :

$C'_A V'_A = C_A V$

$C'_A = \frac{C_A V}{V'A} = \frac{C_A V}{V + Ve}$

A.N : $C'_A = 2.10^{-2}\ mol.L^{-1}$

2. On a : $K = K'$ où $K = \frac{C.\alpha^2}{1-\alpha}$

$\Rightarrow \frac{C\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{C'\alpha'^2}{1-\alpha'}$

Comme $\alpha << 1$ donc : $C\alpha^2 = C'\alpha'^2 \Rightarrow \boxed{\alpha' = \sqrt{\frac{C}{C'}}}$

$= 0,07 = 7\%.$

Chimie

Scanné avec CamScanner

20/20 → page 302

→ Concours d'accès 2007
Médecine "casa"

⇒ dispo sur le drive

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2007 "casa"

Solutions

Exercice

1. Le nom de chaque composé :

A - Butan-2-Ol

B - Chlorure de propanoyle.

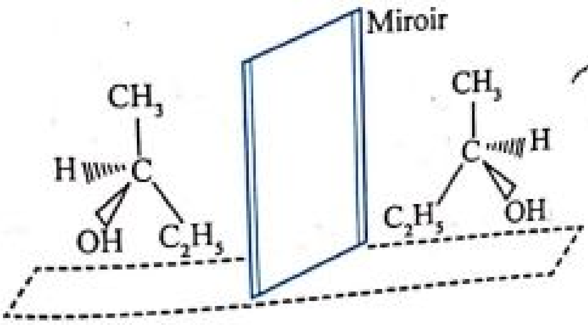
C - Propanoate de méthyl

D - N-méthylpropanamide

2. a - Le composé Chiral est : A.

b - car il présente un Carbone asymétrique.

c - Représentation des deux énantiomères :



Problème

1. l'acide benzoïque est un acide faible, sa base conjuguée est l'ion benzoate : $C_6H_5COO^-$.

2. Equation de la dissolution :

$$C_6H_5COOH + H_2O \rightleftarrows C_6H_5COO^- + H_3O^+$$

3. Expression de la constante d'acidité :

$$K_A = \frac{[C_6H_5COO^-]_{eq} \cdot [H_3O^+]_{eq}}{[C_6H_5COOH]_{eq}}$$

4. Équation du dosage :

$$C_6H_5COOH + HO^- \longrightarrow C_6H_5COO^- + H_2O$$

5. D'après la relation d'équivalence :

$$C = \frac{C_S V_S}{V} = \frac{10^{-2} \times 12}{10} = 1,2 \cdot 10^{-3}\ mol.L^{-1}.$$

Donc la concentration massique :

$$Cm = M \cdot C = 122 \times 1,2 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{Cm = 0,15\ g.L^{-1}}$$

6. Le $pH = pK_A$ pour $V = \frac{V_s}{2}$

C'est-à-dire : V = 6 mL.

7. Ce mélange est nommé :« mélange tampon » caractérisé par un pH fixé et qui varie très très peu par dilution on par ajout de faibles quantités de l'acide (H_3O^+) on de la base (HO^-).

Chimie

20/20 → page 304

+ concours d'accès 2006

→ disponible sur drive

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2006 Casa

Solutions

Exercice 1

1. La molécule qui présente un carbone asymétrique est : (C).

2. La molécule qui présente une isomérie Z et E est: (A) car elle contient une double liaison C = C où chaque carbone est lié à deux groupements différents.

3. L'oxydation de la molécule (C) qui est un alcool conduit à la formation d'un acide carbonique.

Exercice 2

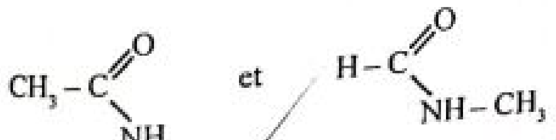
1. Calcul de n :

On a : $M = 12n + 2n+1 + 16 + 14$

$59 = 14n + 31$

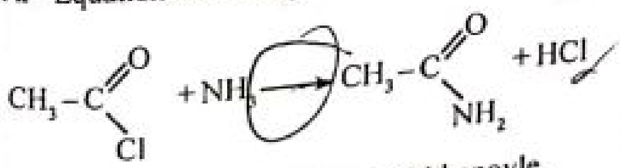
$n = 2$ donc C_2H_5ON.

2. Les isomères de l'amide C_2H_5ON sont :



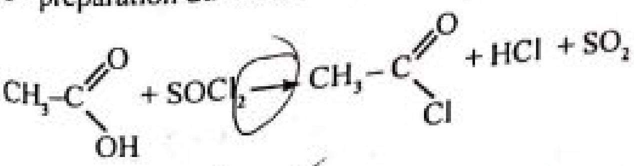
éthonamide N-méthyléthanamide

3. a - Equation de la réaction :



Nom du composé (C) : Chlorure d'éthanoyle.

b - préparation du composé (C) :



Exercice 3

1. $[H_3O^+] = 10^{-pH}$

$= 10^{-2,5}$

$= 3,16 . 10^{-3}\ mol.L^{-1}$

Comme $[H_3O^+] < C$ donc l'acide H_2CO_2 est un acide faible (se dissocié partiellement dans l'eau).

2. Equation de la réaction :

$$H_2CO_2 + H_2O \rightleftarrows HCO_2^- + H_3O^+$$

3. Les entités chimiques présentes dans la solution sont :

H_2CO_2 ; HCO_2^- ; H_2O ; H_3O^+ et $[HO^-]$

$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 3,16 . 10^{-3}\ mol^{-1}$.

$[HCO_2^-] = [H_3O^+] = 3,16 . 10^{-3}\ mol^{-1}$.

$[H_2CO_2] = C_A - [H_3O^+] = 9,68 . 10^{-2}\ mol.L^{-1}$.

$$[HO^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{3,16 . 10^{-3}} = 3,16 . 10^{-12}\ mol.L^{-1}.$$

4. On a : $K_A = \dfrac{[HCO_2^-][H_3O^+]}{[HCOOH]}$

A.N : $K_A = \dfrac{(3,16 . 10^{-3})^2}{9,68 . 10^{-2}}$

$K_A = 1,03 . 10^{-4}$

Donc : $pK_A = -\log K_A$

C'est-à-dire : $pK_A = 3,99$.

5. Le coefficient de dissociation ou taux d'avancement:

$$\alpha = \tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[H_3O^+]}{C_A}$$

$$\alpha = \frac{3,16 . 10^{-3}}{10^{-1}} = 3,16 . 10^{-2}$$

$= 3,16\%$.

Scanné avec CamScanner

20/20 → page 306

+ concours d'accès 2005

→ Voir drive

Scanné avec CamScanner

Concours 2005 casa

Solutions

Exercice 1

1 . Les isomères de l'alcool $C_4H_{10}O$.

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH$: butan-1-Ol

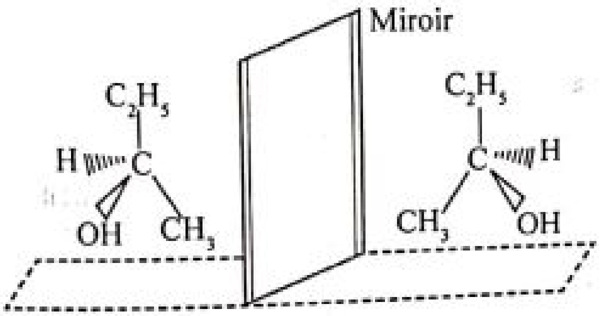
$CH_3-CH_2-CH(OH)-CH_3$: butan-2-Ol

$CH_3-C(CH_3)(OH)-CH_3$: 2-méthylpropan-2-Ol

2 . La molécule qui présente une isomérie optique est : $CH_3-CH_2-CH(OH)-CH_3$

Car elle présente un carbone asymétrique.

3 . Représentation des deux énantiomères :



4 . Nom d'alcool : butan-2-Ol :

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+} + 4H_2O$$

$$CH_3-CH_2-CH(OH)-CH_3 \rightleftharpoons CH_3-CH_2-C(=O)-CH_3 + 2H^+ + e^-$$

Equation bilan :

$$2MnO_4^- + 5CH_3-CH_2-CH(OH)-CH_3 + 6H^+ \longrightarrow 2Mn_{2+} + 5CH_3-CH_2-C(=O)-CH_3 + 8H_2O$$

Problème :

1 . Formule brute de A : CnH2n+2O

On a : M = 12n + 2n+2 + 16

46 = 14n + 18

n = 2

2 . a - Equation de la réaction d'estérification :

$$CH_3-CH_2-OH + CH_3-C(=O)OH \longrightarrow CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_3 + H_2O$$

b - Réactif (C) : $CH_3-C(=O)Cl$

Réactif (D) : $CH_3-C(=O)-O-C(=O)-CH_3$

c - Equation de la réaction :

$$\underset{(C)}{CH_3-C(=O)Cl} + \underset{(A)}{CH_3-CH_2-OH} \longrightarrow \underset{(E)}{CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_3} + HCl$$

II - a - Le bichromate de potassium joue le rôle de la solution titrante, c'est Oxydant du couple $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$

$$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \rightleftharpoons 2G^{3+} + 7H_2O$$

$$CH_3-CH_2-OH + H_2O \rightleftharpoons CH_3-C(=O)OH + 4H^+ + 4e^-$$

Équation du dosage :

$$2Cr_2O_7^{2-} + 3CH_3-CH_2-OH + 16H^+ \longrightarrow 4Cr^{3+} + 3CH_3-C(=O)OH$$

c - D'après la relation d'équivalence : $\frac{CV}{3} = \frac{C'V'_{eq}}{2}$

Donc : $C = \frac{3C'V'_{eq}}{2} = 0,03\ mol.L^{-1}$

Concentration massique : Cm = M.C

Cm = 1,38 g/L.

Matière

Physique

Scanné avec CamScanner

Ondes mécaniques progressives et périodiques

Définition :

Une *onde progressive mécanique périodique* est le phénomène qui accompagne la propagation, dans un milieu matériel d'un signal (perturbation) se répétant identique à lui-même à intervalles de temps identiques appelés période T.

Double périodicité du phénomène :

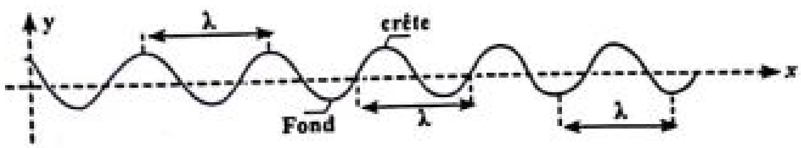
	: La longueur d'onde (**période spatiale**)
	: La distance parcourue pendant un intervalle de temps égal à la période T
λ	: La distance entre deux crêtes (sommets) consécutifs (ou entre deux fonds (creux) consécutifs)
	: La distance entre deux points qui vibrent de la même manière à un instant donné
	: La distance séparant deux perturbations consécutives

	: Période (période temporelle)
T	: La durée nécessaire pour parcourir une distante égale à la longueur d'onde λ
	: La durée séparant l'arrivée de deux perturbations successives en un point

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{T} = \lambda . N}$$

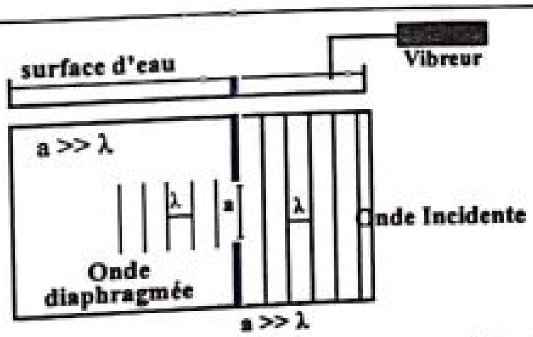
avec λ : Longueur d'onde en mètre (m)
T : Période en seconde (s)
N : Fréquence en Hertz (Hz)
V : Vitesse de propagation en $m.s^{-1}$

$$\boxed{V = \frac{d}{\Delta t}}$$



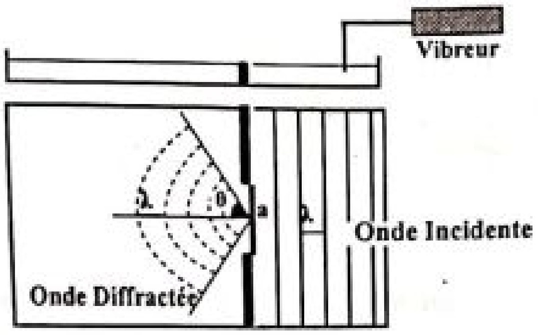
Phénomène de diffraction

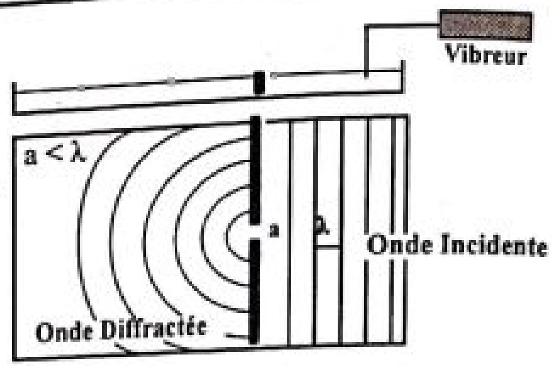
Un onde plane périodique rencontre un obstacle ou une ouverture ou une fente d'épaisseur a :



L'onde traverse la fente sans changer ni de forme ni de fréquence ni de vitesse et ni de longueur d'onde juste une partie est bloquée.

Scanné avec CamScanner





a ≤ λ : Phénomène de diffraction

a < λ : Phénomène de diffraction

- L'onde change de forme et devient circulaire.
- La fente d'épaisseur a se comporte comme une source ponctuelle d'onde circulaire.
- L'onde diffractée et l'onde incidente ont la même période, la même célérité et par conséquent, la même longueur d'onde.

Onde diaphragmée :

Onde mécanique progressive périodique se propageant sans modification à travers une ouverture.

Onde diffractée :

Onde mécanique progressive périodique se propageant avec étalement spatial à travers une ouverture.

N.B :

- $a \leq \lambda$: l'onde est limite dans portion angulaire circulaire d'angle θ (angle de diffraction) $\sin(\theta) \approx \theta = \frac{\lambda}{a}$
- Pour une longueur d'onde donnée, la diffraction est d'autant plus importante que la dimension l'ouverture a est faible.

Milieu dispersif :

Un milieu est dispersif si la vitesse (célérité) de l'onde dans le milieu dépend de la fréquence de la source.

Scanné avec CamScanner

Ondes lumineuses

- L'onde lumineuse résulte de la propagation d'une perturbation électromagnétique dans les milieux transparents.
- Les ondes lumineuses périodiques sont appelées des radiations.
- La lumière peut se propager dans le vide : La lumière est une onde électromagnétique (n'est pas une onde mécanique).
- ***Lumière monochromatique :*** lumière constituée d'une seule radiation lumineuse d'une longueur d'onde correspondant à une couleur (lumière émise par un laser).
- ***Lumière polychromatique :*** lumière constituée d'un ensemble de lumières monochromatiques de fréquences différentes.

• Longueur d'onde et fréquence d'une radiation lumineuse.

Une radiation lumineuse est caractérisée par :

- Sa fréquence ν (en Hz) ou sa période T (en s). $C = \lambda_0 . \nu$
- Sa longueur d'onde dans le vide λ_0. $V = \lambda . \nu$

N.B :

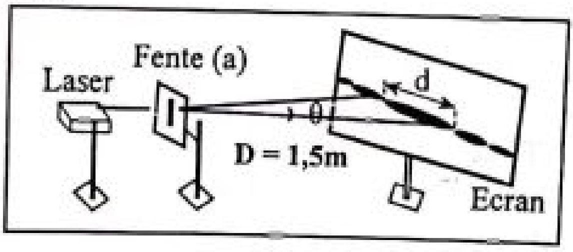
- La fréquence ν d'une radiation lumineuse ne dépend pas du milieu de propagation.
- Alors que la longueur d'onde λ dépend du milieu de propagation.

Relation de diffraction :

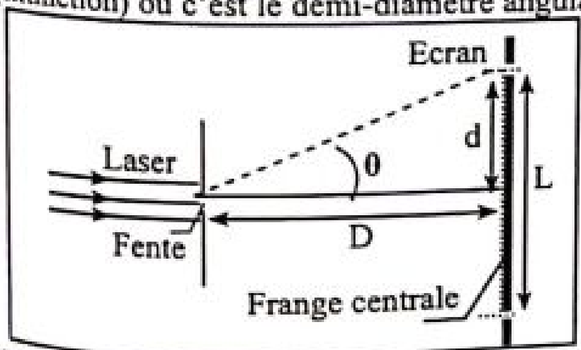
$\theta = \frac{\lambda}{a}$ avec λ : Longueur d'onde (m)

a : Largeur (diamètre) de la fente (m)

θ : Ecart angulaire (rad)



L'écart angulaire θ, est l'angle entre le centre de la tache centrale et le centre de la première tâche sombre (extinction) ou c'est le demi-diamètre angulaire de la tâche centrale.



d : le rayon de la frange (tâche) centrale

L = 2.d : la largeur (diamètre de la tâche centrale :

$$\tan(\theta) \approx \frac{d}{D} = \frac{L}{2.D}$$

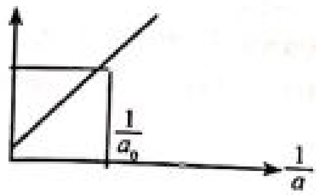
θ étant faible alors : $\theta = \frac{d}{D} = \frac{L}{2.D}$

Or : $\theta = \frac{\lambda}{a}$, on en conclut : $\theta = \frac{d}{D} = \frac{L}{2.D} = \frac{\lambda}{a}$

N.B :

$$\theta = \frac{\lambda}{a} = \lambda . \frac{1}{a}$$

La fonction $\theta = f(1/a)$ est une fonction linéaire dont le coefficient directeur est la longueur d'onde : $\lambda = \frac{\theta_0}{\frac{1}{a_0}}$



physique

N.B :

- Les conditions de la diffraction :
  - Le diamètre de la fente soit faible.
  - La lumière soit monochromatique.
- Le phénomène de la diffraction montre que la lumière est une onde.

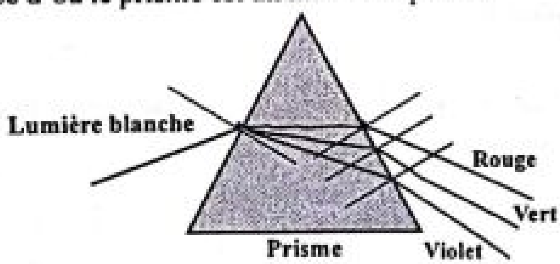
La lumière visible :

- On caractérise une radiation lumineuse par sa longueur par sa longueur d'onde dans le vide.
- Le domaine de radiations lumineuses visibles s'étend de 400 nm (violet) à 780 nm (rouge), 400 nm $\leq \lambda \leq$ 780 nm)

Formules (relations) du prisme :

1) sin (i) = n.sin(r)
2) sin (i') = n.sin(r')
3) A = r + r'
4) D = (i + i') = A

* $n = \frac{C}{V} = \frac{C}{\lambda.N}$: l'indice de réfraction du prisme dépend de la longueur d'onde λ de la radiation lumineuse incidente donc de sa vitesse d'où le prisme est un milieu dispersif.



* Toutes les radiations incidente ont même angle d'incidence (i), différent par leurs longueurs d'ondes par conséquent par leurs indices de réfraction (si n augmente alors r diminue).
* La radiation rouge est caractérisée par une longueur d'onde λ la plus élevée dans le visible donc son indice de réfraction est le plus faible alors la radiation rouge est la plus dévié par rapport à la normale : sin (i) = n.sin(r).

Comment exploiter les relations du prisme :

1- Données le triplet (i, A, n), l'angle d'incidence i, l'angle au sommet A et n l'indice de réfraction du prisme, souvent on suit l'enchaînement 1324.

1) sin i = n.sin r	On calcul $\sin r = \frac{\sin i}{n}$	d'où : r = ...
2) A = r + r'	r' = A − r = ...	
3) sin i' = n.sin r'	sin i' = ...	
4) D = (i + i') − A	Donc : D = ...	

2- Données le triplet (i', A, n), l'angle d'émergence i', l'angle au sommet A et n l'indice de réfraction du prisme, souvent on suit l'enchaînement 2314.

physique

Scanné avec CamScanner

Cas particuliers :

	Cas : 1	Cas : 2	Cas : 3
Déterminer le cas particulier	Si : $i = i'$	Incidence normale : $i = 0$	Émergence normale : $i' = 0$
Conclusion	Alors : $r = r'$	$r = 0$ Tout rayon lumineux incident normalement à la surface du prisme ne dévié pas.	$r' = 0$ Tout rayon lumineux émergeant normalement de la surface du prisme est le prolongement d'un incident normalement sur la même surface.
Remplacer dans : 3) $A = r + r'$ 4) $D = (i + i') - A$	3) $A = r + r'$ $= 2.r = 2.r'$ 4) $D = (i + i') - A$ $= 2.i - A$ $= 2.i' - A$	3) $A = r + r'$ $= r'$ 4) $D = (i + i') - A$ $= i' - A$	3) $A = r + r'$ $= r$ 4) $D = (i + i') - A$ $= i - A$
Conclure i et r Ou i' et r' En fonction de A et / ou D	$r = r' = \dfrac{A}{2}$ $i = i' = \dfrac{A + D}{2}$	$r' = A$ $i' = A + D$	$r = A$ $i = A + D$
Exploiter dans 1) $\sin i = n \sin r$ Ou 2) $\sin i' = n \sin r'$	1) $n = \dfrac{\sin i}{\sin r}$ $= \dfrac{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$	2) $n = \dfrac{\sin i'}{\sin r'} = \dfrac{\sin(A + D)}{\sin(A)}$	1) $n = \dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{\sin(A + D)}{\sin(A)}$

N.B :

Si : $\sin\alpha = \alpha$ => $\boxed{D = A(n-1)}$

La radioactivité

1 Composition du noyau d'un atome :

- Le noyau de l'atome est 100 000 fois plus petit que l'atome.
- De plus, il rassemble pratiquement toute la masse de l'atome.
- Le noyau est constitué de particules appelées nucléons (les protons et les neutrons).
- Le noyau est représenter par $^{A}_{Z}X$ avec **A :** Le nombre de nucléons aussi le nombre de masse
  Z : Le nombre de protons aussi le nombre de charges
  N : Le nombre de neutrons, $N = A - Z$

2 Nucléides :

- **Nucléide :** ensemble d'atomes de noyaux identiques.
- L'ensemble des noyaux ayant le même nombre Z de protons et le même nombre de neutrons N et le symbole $^{A}_{Z}X$.

2° Lois de conservation (Lois de SODDY) :

- Les réactions nucléaires obéissent à deux lois de conservation :
  - Conservation de la charge électrique (Conservation de Z nombre de proton) ;
  - Conservation du nombre de nucléons (Conservation de A nombre de nucléon).
- Elles permettent d'écrire correctement les équations bilans de réactions nucléaires.

$$^{A_1}_{Z_1}X_1 \rightarrow {}^{A_2}_{Z_2}X_2 + {}^{A_3}_{Z_3}X_3$$: Équation d'une réaction nucléaire

a- Loi de conservation du nombre de charge :
La somme des nombres de charge du noyau-fils et de la particule qui sont formés est égale au nombre de charge du noyau désintégré (noyau-père).

$$Z_1 = Z_2 + Z_3$$

b- Loi de conservation du nombre de nucléons :
La somme des nombres de nucléons du noyau-fils et de la particule qui sont formés est égale au nombre de nucléons du noyau désintégré (noyau-père).

$$A_1 = A_2 + A_3$$

3 Les différentes désintégrations nucléaires :

3.1- Radioactivité α :

Définition :

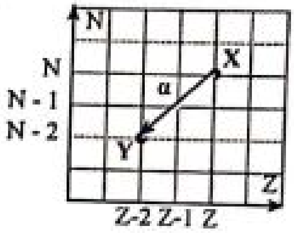
La radioactivité **α** une transformation naturelle et spontanée d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec émission d'un noyau d'Hélium $^{4}_{2}He$

physique

Scanné avec CamScanner

Équation : $^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$

Exemple : $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$



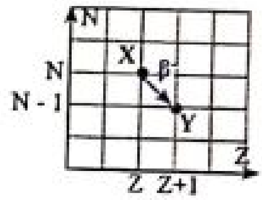
La radioactivité α concerné les noyaux lourds instables à cause d'un excès de nucléons. Elle se traduit par l'émission d'une particule a (noyau d'hélium $^{4}_{2}He$).

3.2- *Radioactivité β- :*

La radioactivité β- une transformation naturelle et spontanée d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec émission d'un électron $^{0}_{-1}e$.

Équation : $^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A} + {}^{0}_{-1}e$

Exemple : $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$



La radioactivité β- concerne les noyaux instables à cause d'un excès de neutrons. Elle se traduit par l'émission d'un électron.

Mécanisme (ou Explication) :

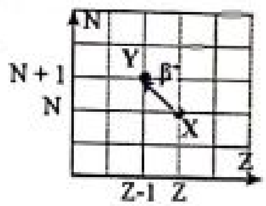
Au cours de la transformation β-, et ***dans le noyau :***

- Le nombre de nucléon A reste constante par contre le nombre de proton augmente d'une unité et le nombre de neutron diminue d'une unité.

- Un neutron s'est transformé en un proton avec émission d'un électron :

$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e$ ou $^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{0}_{-1}e$

3.3- *Radioactivité β+ :*



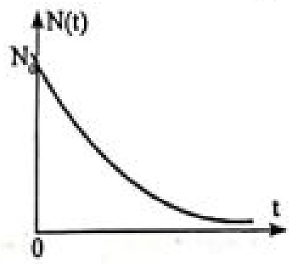
La radioactivité β+ une transformation naturelle et spontanée d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec émission d'un électron 01e.

Équation : $^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A} + {}^{0}_{1}e$

Exemple : $^{30}_{15}P \rightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{0}e$

La radioactivité β+ concerne les noyaux instables à cause d'un excès de protons. Elle se traduit par l'émission d'un positon.

8° Loi de décroissance radioactive :



- La loi d'évolution du nombre N de noyaux radioactifs présents en fonction du temps.

- La loi de décroissance radioactive est : $N(t) = N_0 . e^{-\lambda.t}$

$N(t) = N_0 . e^{-\lambda t}$ avec N_0 est le nombre de noyaux présents à la date t = 0.
N(t) le nombre de noyaux encore présents à l'instant t;
$\lambda(s^{-1})$ une constante radioactive.

■ **Autres expressions de la loi de décroissance radioactive :**

$m = m_0 . e^{-\lambda.t}$ avec m_0 : masse de l'échantillon présents à la date t = 0
m : masse de l'échantillon présents à l'instant t.

Scanné avec CamScanner

$n = n_0.e^{-\lambda.t}$ avec n_0 : Quantité de matière de l'échantillon présents à la date $t = 0$
n : Quantité de matière de l'échantillon présents à l'instant t.

La constante radioactive :

- Chaque nucléide radioactif est caractérisé par une constante radioactive λ, qui est la probabilité de désintégration d'un noyau par unité de temps.
- Elle s'exprime en s^{-1}.
- La constante λ ne dépend que du nucléide et est indépendante du temps, des conditions physiques et chimiques.
- $\tau = \frac{1}{\lambda}$: La constante de temps, s'exprime en (S).

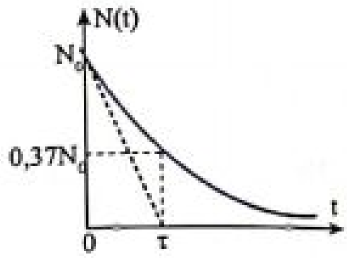
Comment déterminer graphiquement τ et en déduire □ :

$$N(t) = N_0 \,.\, e^{-\lambda.t} = N_0 \,.\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A l'instant $t = \tau$ on a : $N(\tau) = N_0 \,.\, e^{-1}$ donc : $N(\tau) = 0,37 \,.\, N_0$

$$\text{Ou : } \frac{N(\tau)}{N_0} = 0,37 = 37\%$$

On repère sur l'axe N(t) le point N(τ) et après projections sur l'axe des temps on détermine τ et on peut en déduire : $\lambda = \frac{1}{\tau}$.



Demi-vie :

La demi-vie ($t_{1/2}$) ou période radioactive :

- Est une caractéristique d'un nucléide.
- *C'est la durée correspondant à la désintégration de la moitié des noyaux radioactifs présents dans l'échantillon.*
- Elle s'exprime en seconde (S).

$$A_{1/2}, \text{ on a : } N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \quad \text{d'où :} \quad t_{1/2} = \frac{\ell n(2)}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

Comment exploiter la loi de décroissance radioactive :

$$N = N_0.e^{-\lambda.t}$$

N_0 : le nombre de noyaux présents à la date $t = 0$

N(t) : le nombre de noyaux encore **présents** à l'instant t.

N'(t) : le nombre de noyaux encore **désintégrés** à l'instant t.

$$N_0 = N(t) + N'(t)$$

1)	$N = N_0.e^{-\lambda t}$
2)	$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda.t}$
3)	$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda.t$

Déterminer $t_{1/2}$ la demi-vie

A $t = t_{1/2}$, on a : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$

et $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda.t1/2}$

$\ell n\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda.t_{1/2}$ et $\ell n(2) = \lambda.t_{1/2}$

4)

Exploiter la relation $\ell n(2) = \lambda.t_{1/2}$ pour définir t par exemple : $\ell\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda.t = \frac{\ell n(2)}{t_{1/2}} \,.\, t$

Et par suite définir t :

$$t = -\frac{\ell n\left(\frac{N}{N_0}\right)}{t_{1/2}} \,.\, t_{1/2}$$

$$N_0 = N(t) + N'(t)$$

En divisant N_0, on obtient : $\frac{N}{N_0} + \frac{N'}{N_0} = 1.$

Noyaux, Masse, Energie

1 Équivalence masse – énergie :

- *Toute particule de masse m, au repos, possède une énergie appelé énergie de masse, notée E.*
- Energie de masse : énergie potentielle que tout système matériel, de masse m, possède :

$E = m.C^2$ avec E : énergie en joule (J)
m : la masse du corps au repos (Kg)
C : la célérité de la lumière dans le vide (m/s), $C = 299792458$ m/s = 3.108 m/s.

2 Une autre unité d'énergie :

- Le Joule est une unité d'énergie mal adaptée à l'échelle microscopique.
- A cette échelle, on préfère utiliser l'électron-volt (eV) ou le mégaélectronvolt (MeV)

$\boxed{1\ eV = 1,6 \times 10^{-19}\ J}$ ou $\boxed{1\ MeV = 10^{6}\ eV = 1,6 \times 10^{-13}\ J}$

3 La dissolution d'un noyau :

Le noyau ${}^{A}_{Z}X$ se dissocie en ses nucléons (protons et neutrons)

Défaut de masse :

Le défaut de masse d'un noyau Δm est la différence entre la somme des masses de ses nucléons pris séparément et la masse du noyau.

- La masse des nucléons pris séparément : $Z.m_p + (A - Z) . m_n$ avec

m_p : masse d'un proton m_n : masse d'un neutron

- La masse du noyau X est m noyau, alors : $\boxed{\Delta m = (Z.mp + (A - Z) . m_n) - m({}^{A}_{Z}X)}$: défaut de masse.

Δm le défaut de masse est une grandeur positive.

Energie de liaison d'un noyau : $\boxed{E_\ell = \Delta m.C^2}$

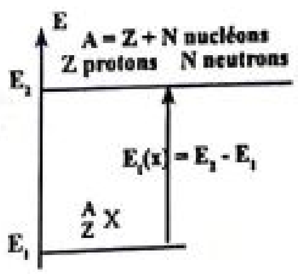
L'énergie de liaison E_ℓ d'un noyau atomique est l'énergie qu'il faut fournir au noyau au repos pour le dissocier en ses nucléons constitutifs pris au repos.

E_ℓ est une grandeur positive. $E_\ell = \Delta m.C^2 = [(Z.mp + (A - Z) . mn) - m({}^{A}_{Z}X)] . C^2$

L'énergie de liaison par nucléon □ :

$\varepsilon = \dfrac{E_\ell}{A}$ avec E_ℓ : Energie de liaison A : Nombre de nucléons

Un noyau atomique est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.



4 Réaction nucléaire :

Soit l'équation de la réaction nucléaire : ${}^{A_1}_{Z_1}X_1 + {}^{A_2}_{Z_2}X_2 \rightarrow {}^{A_3}_{Z_3}X_3 + {}^{A_4}_{Z_4}X_4$

Δm : la variation de masse entre les produits et les réactifs de la transformation nucléaire :

$\Delta m = \sum m_{produits} - \sum m_{Réactifs}$; $\Delta m = m(X_3) + m(X_4) - (m(X_1) + m(X_2))$

L'énergie libérée par la réaction : $\boxed{Elib = |\Delta E| = |\Delta m|. C^2}$

Scanné avec CamScanner

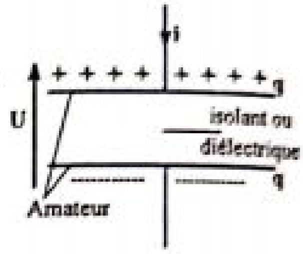
Condensateur – Circuit (RC)

Dipôle RC : association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C.

1 Condensateur :

Description :

Un condensateur est un dipôle constitué de deux armatures métalliques parallèles, placées à des potentiels différents et séparées par un isolant ou un diélectrique.



Relation charge-tension :

La charge d'un condensateur, notée q, est liée à la tension U par la relation :

$q = C.U$ avec : C : capacité du condensateur (F)
q : charge du condensateur (C)
U : tension (V).

Capacité d'un condensateur :

- Le coefficient de proportionnalité C est appelé capacité du condensateur.
- Son unité est le Farad (F).
- Autres unités du Farad

Millifarad	Microfarad	Nanofarad	Picofarad
$1mF = 10^{-3}F$	$1\mu F = 10^{-6}F$	$1nF = 10^{-9}F$	$1pF = 10^{-12}F$

Expression de l'intensité

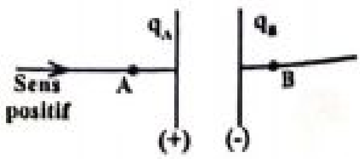
Par définition, l'intensité du courant traversant un condensateur est la variation de la charge q au cours du temps.

En adoptant la convention réceptrice pour ce dipôle, on obtient :

Courant continu	Courant variable
$I = \frac{Q}{\Delta t}$	$i = \frac{dq}{dt}$ avec $q = C.U_c$ d'où $i = C.\frac{dU_C}{dt}$

2 Sens conventionnel du courant :

Le sens positif (Conventionnel) du courant du courant est toujours vers l'armature positive.

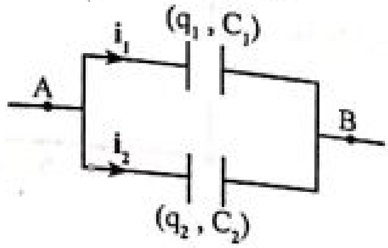


- Si le passage courant est dans le sens positif, alors $i > 0$ et le condensateur se charge, q_A augmente (fonction décroissante du temps) et $\frac{dq_A}{dt} > 0$.
- Si le passage courant est dans le sens négative, alors $i < 0$ et le condensateur se décharge, q_A diminue (fonction décroissante du temps) et $\frac{dq_A}{dt} < 0$.

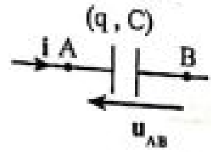
physique

3 Association des condensateurs :

Association en parallèle :



Condensateur équivalent



La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en parallèle de deux condensateurs est égale à la somme de leurs capacités C_1 et C_2.

$$C = C_1 + C_2$$

N.B :

$$U_{AB} = C^{te} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q}{C}$$

La capacité équivalente C de plusieurs condensateurs de capacités C_1, C_2, C_3 .... C_n montés en parallèle, de capacité est la somme des capacités de chaque condensateur : $C = \Sigma C_i$

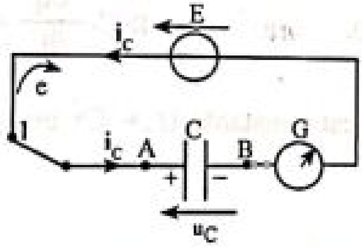
Intérêt de l'association :

$C = C_1 + C_2$: L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente supérieure à la plus grande d'entre elles. $C > C_1$ et $C > C_2$.

I. __Charge d'un condensateur :__

1.1- *Montage de la charge :*

Interrupteur K sur la position (1) :



1.2- *Équation différentielle :*

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + U_C = E$ et les transitions :

$$U_R = R.i = R \cdot \frac{dq}{dt} = R.C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

__Variable la tension du condensateur Uc :__

$$U_C + R.C.\frac{dU_C}{dt} = E$$

Variable le charge q :

$$\frac{q}{C} + R.\frac{dq}{dt} = E \quad \text{Ou} \quad q + R.C.\frac{dq}{dt} = E.C.$$

N.B :

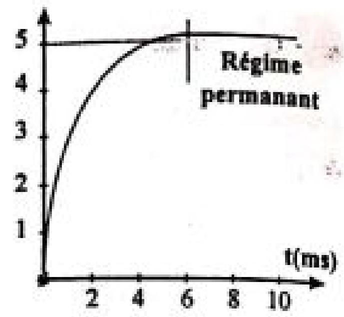
Dans le régime permanent la variable est constante $U_C = C^{te}$ (ou $q = C^{te}$) et sa dérivé première est nulle

$$\frac{dU_C}{dt} t = 0 \left(\text{ou } \frac{dq}{dt} = 0\right)$$

physique

$U_C = C^{te}$ et $\frac{dU_C}{dt} = 0$, on remplace dans l'équation différentielle et on obtient $U_C = E$

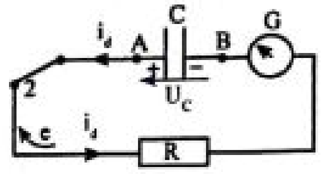
$q = C^{te}$ et $\frac{dq}{dt} = 0$, on remplace dans l'équation différentielle et on obtient $q = C.E$



2. *Décharge d'un condensateur :*

2.1- *Montage de la charge :*

Interrupteur K sur la position (2) :



2.2- *Équation différentielle :*

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + U_C = 0$ et les transitions :

$$U_R = R.i = R.\frac{dq}{dt} = R.C.\frac{dU_C}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

Variable U_C :

$$UC + R.C.\frac{dU_C}{dt} = 0$$

Variable q :

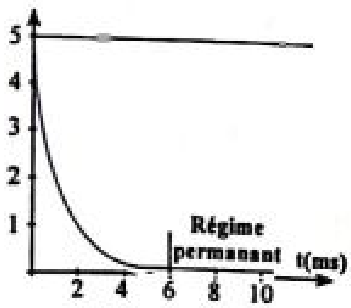
$$\frac{q}{c} + R.\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad q + R.C.\frac{dq}{dt} = 0.$$

N.B :

Dans le régime permanent la variable est constante $U_C = C^{te}$ ou $q = C^{te}$ et sa dérivé première est nulle $\frac{dU_C}{dt} = 0$ ou $\frac{dq}{dt} = 0$.

$U_C = C^{te}$ et $\frac{dU_C}{dt} = 0$, on remplace dans l'équation différentielle et on obtient $U_C = 0$

$q = C^{te}$ et $\frac{dq}{dt} = 0$, on remplace dans l'équation différentielle et on obtient $q = 0$



Physique

Exploiter l'équation horaire $U_C(t)$

Pour déterminer l'expression d'autres fonctions horaires :
$q(t)$: La charge du condensateur.
$i(t)$: L'intensité du courant électrique.
$U_R(t)$: La tension aux bornes du conducteur ohmique.

Expression de la charge q(t) du condensateur :

Charge d'un condensateur :

On a : $U_C(t) = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ et $q = C.U_C$

Alors : $q(t) = C.U_C(t) = C.E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

à t = 0 le condensateur est vide et sa charge est nulle. On remplace t = 0 dans q(t) et $q(0) = 0$

Décharge d'un condensateur :

On a : $U_C(t) = E.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $q = C.U_C$

Alors : $q(t) = C.U_C(t) = C.E.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

à t = 0 le condensateur est chargé et sa charge est maximale. On remplace t = 0 dans q(t) et $q(0) = C.E$

Expression de l'intensité de courant i(t) :

Charge d'un condensateur :

① A partir de $U_C(t) = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$ et $\tau = R.C$

donc : $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt} = C.E.\left(\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Décharge d'un condensateur :

A partir de $U_C(t) = E.\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$ et $\tau = R.C$

donc : $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt} = C.E.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i(t) = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

② A partir de $U_C(t) = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$ et $\tau = R.C$

donc : $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt} = C.E.\left(\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

A partir de $U_C(t) = E.\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$ et $\tau = R.C$

donc : $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt} = C.E.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i(t) = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

③ A partir de $U_R(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

et $i = \frac{U_R}{R}$

Donc : $i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

A t = 0 l'intensité de courant est maximale,

On remplace t = 0 dans i(t) et $i(0) = I_0 = \frac{E}{R}$.

A partir de $U_R(t) = -E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

et $i = \frac{U_R}{R}$

Donc : $i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

A t = 0 l'intensité de courant est minimale.

On remplace t = 0 dans i(t) et $i(0) = -I_0 = -\frac{E}{R}$

physique

Scanné avec CamScanner

□ **Expression de la tension aux bornes du conducteur ohmique $U_R(t)$:**

Charge d'un condensateur :

A partir de $U_C(t) = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

(1) La loi d'additivité des tensions :

$$U_R + U_C = E$$
$$U_R = E - U_C$$
$$U_R = E - U_C = E - E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$
$$U_R(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(2) Les transitions $U_R = R.i = R.\frac{dq}{dt} = R.C.\frac{dU}{dt}$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = E.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_R(t) = R.C.\frac{dU_C(t)}{dt} = R.C.E.\left(\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_R(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A t = 0 la tension aux bornes du conducteur ohmique est maximale, on remplace t = 0 dans $U_R(t)$ et $U_R(0) = E$

Décharge d'un condensateur :

A partir de $U_C(t) = E.\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

La loi d'additivité des tensions :

$$U_R + U_C = 0$$
$$U_R = -U_C$$
$$U_R(t) = E.e\text{-}t/\tau$$

Les transitions $U_R = R.i = R.\frac{dq}{dt} = R.C.\frac{dU}{dt}$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = E.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_R(t) = R.C.\frac{dU_C(t)}{dt} = R.C.E.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_R(t) = -E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

à t = 0 la tension aux bornes du conducteur ohmique est minimale, on remplace t = 0 dans $U_R(t)$ et $U_R(0) = -E$

Scanné avec CamScanner

Quelques courbes : Comment tracer l'allure des courbes en $e^{-\alpha.t}$

Pour tracer des courbes en $e^{-\alpha.t}$ il faut prendre en considération les limites des courbes

La fonction $e^{-\alpha.t}$

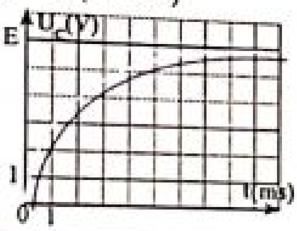
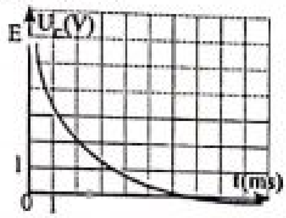
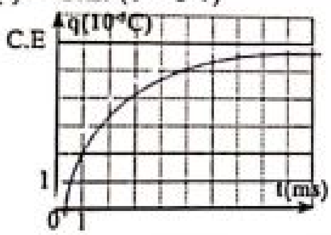
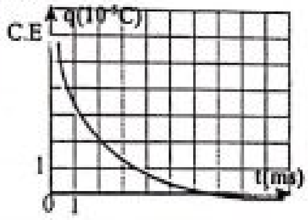
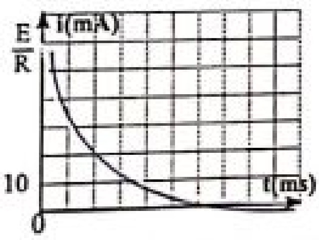
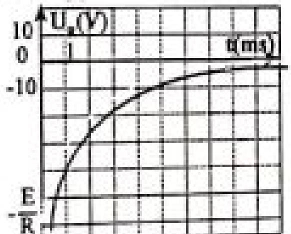
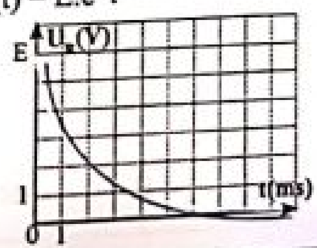
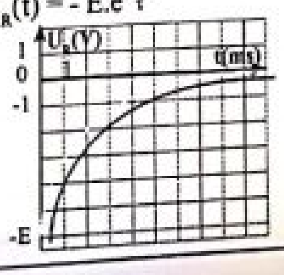
A t = 0 Régime initial et $e^{-\alpha.t} = e^0 = 1$	Quand t tend vers l'infini ($t \to \infty$) ou $t > 5.\tau$ Le régime permanent et $e^{-\alpha.t} = 0$

$e^{-\alpha.t}$ prend la valeur 1 pour déterminer le début de la courbe et la valeur 0 (Zéro) pour déterminer sa limite (Le régime permanent).

Exemples :

- La fonction $A.e^{-\lambda.t}$ • A t = 0 prend la valeur A • Quand $t \to \infty$ prend la valeur 0 (Le régime permanent)
- La fonction $A.(1 - e^{-\lambda.t})$ • A t = 0 prend la valeur A • Quand $t \to \infty$ prend la valeur A (Le régime permanent)

E = 6V R = 100Ω C = 20μF

	Charge d'un condensateur	Décharge d'un condensateur
1. Expression de $U_C(t)$:	$U_C(t) = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ 	$U_C(t) = E.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ 
2. Expression de q(t)	$q(t) = C.E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ 	$q(t) = C.E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ 
3. Expression de i(t)	$i(t) = \frac{E}{R}.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ 	$i(t) = -\frac{E}{R}.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ 
4. Expression de $U_R(t)$	$U_R(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ 	$U_R(t) = -\,E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ 

physique

Le circuit RL

Tension aux bornes de la bobine :

$U_L = r.i + L.\dfrac{di}{dt}$ avec

- r = résistance interne (Ω)
- L = inductance de la bobine (H – Henry)
- i = intensité du courant (A)
- U_L = tension aux bornes de la bobine (V).

Cas particuliers :

Courant continu :

$I = C^{te}$ et $\dfrac{di}{dt} = 0$ donc $U_L = r.i$

En courant continu la bobine se comporte comme un conducteur ohmique.

Résistance interne négligeable r = 0 :

$U_L = r.i + L.\dfrac{di}{dt} = L.\dfrac{di}{dt}$

Influence de la bobine dans un circuit est :

Une bobine permet de retarder l'établissement ou la rupture (annulation) du courant et ceci est dû au produit $L.\dfrac{di}{dt}$

Energie emmagasiné dans une bobine

L'énergie stockée dans une bobine, s'exprime à partir de la relation :

$Em = \dfrac{1}{2} L.i^2$ avec

- Em en Joule (J)
- L en henry (H)
- I en Ampère (A)

N.B :

- $\tau = \dfrac{L}{R_T}$: Constante de temps et est homogène à un temps.
- $I_0 = \dfrac{E}{R+r} = \dfrac{E}{R_T}$: Intensité maximale du courant électrique dans le circuit avec $R_T = R + r$.
- Conditions initiales (à t = 0)

Etablissement de courant : $i = 0$ et $U_R = 0$

Annulation de courant : $i = I_0 = \dfrac{E}{R+r} = \dfrac{E}{R_T}$ et $U_R = R.I_0$.

Scanné avec CamScanner

- Il faut souvent penser à exploiter les conditions initiales dans :

(1) La loi d'additivité de tension :

Etablissement : $U_R + U_L = E$ et $U_L = E$
Annulation de courant : $U_R + U_L = 0$ et $U_L = -U_R = -E$

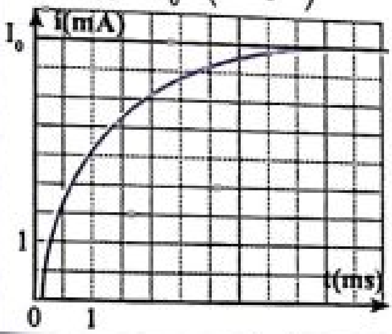
(2) L'équation différentielle :

Etablissement : $i + \frac{L}{R+r} \cdot \frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}$ et $\frac{L}{R+r} \cdot \frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}$
Annulation : $i + \frac{L}{R+r} \cdot \frac{di}{dt} = 0$ et $\frac{L}{R+r} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$

i(t) : Intensité de courant :

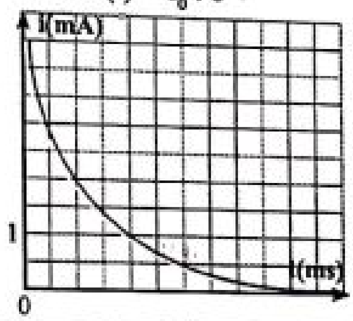
Etablissement de courant

$I(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



Annulation (Rupture) de courant :

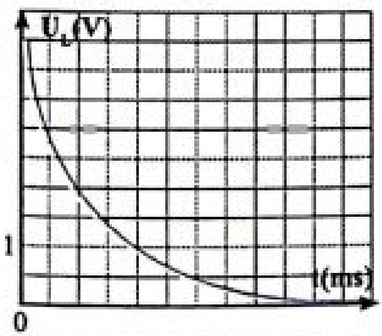
$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$



$U_L(t)$: La tension $U_L(t)$ dans le cas ou $r = 0$:

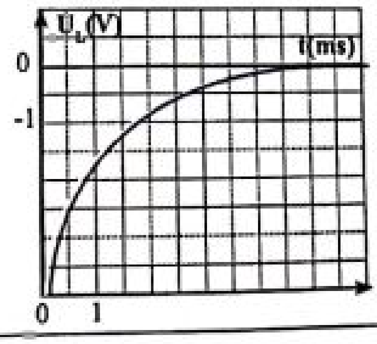
Etablissement de courant

$U_L(t) = R.I_0 \cdot 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$



Annulation (Rupture) de courant :

$U_L(t) = - R.I_0 .e^{-\frac{t}{\tau}}$

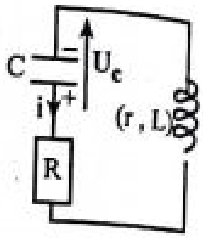


physique

Scanné avec CamScanner

Circuit RLC

1 Décharge d'un condensateur dans une bobine :



Le montage est constitué de :

- Un condensateur de capacité C, initialement chargé et porteur de la charge q_0 et une tension $U_0 = E$
- Une bobine de coefficient d'induction L et de résistance interne r.
- Un conducteur ohmique de résistance R_0.

La résistance totale du circuit est $R_T = R_0 + r$

2 Équation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + U_C + U_L = 0$ et les transitions :

$$U_R = R.i = R.C.\frac{dq}{dt} = R.C.\frac{dU_C}{dt} \quad \text{et} \quad U_L = r.i + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

Variable U_C :

$$q = C.U_C \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$$

$$R.i + U_C + L.\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc :} \quad R.C.\frac{dU_C}{dt} + U_C + L.C.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{L.C}U_C = 0$$

Variable q :

$$R.i + U_C + L.\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc :} \quad R.\frac{dq}{dt}t + \frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{L.C}q = 0$$

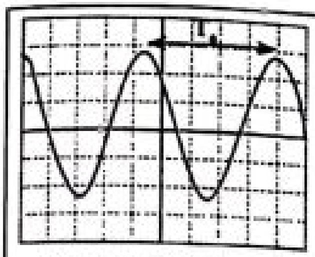
La grandeur : $\frac{R}{L}.\frac{dU_C}{dt}$ ou $\frac{R}{L}.\frac{dq}{dt}$

- Concrétise le caractère non-oscillatoire du système (l'amortissement des oscillations électriques).
- Détermine le régime des oscillations (périodique, pseudo périodique ou apériodique)

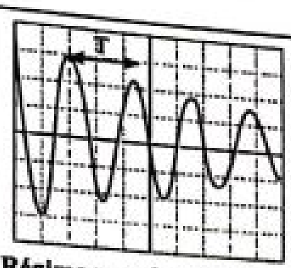
La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations, quand la résistance R du circuit est :

- Faible les oscillations du système sont amorties, le régime est pseudopériodique.
- Élevée le système n'oscille pas et donc le régime est apériodique.

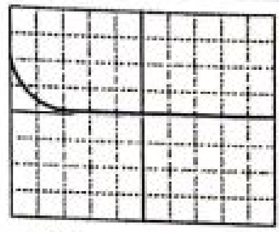
Scanné avec CamScanner



Régime périodique
T_0 : la période



Régime pseudo périodique
T : la pseudo période

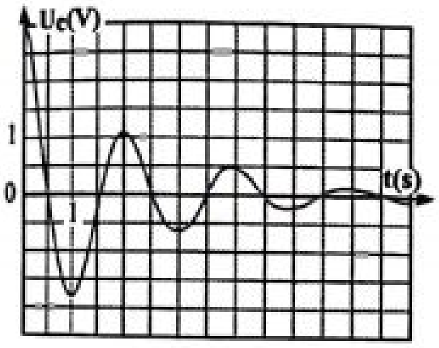


Régime apériodique

N.B :

La période et pseudo période sont considérés souvent égales $T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$.

3 Courbe de la tension du condensateur (régime pseudo périodique) :



L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps :

La cause : La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations.

L'explication : Dissipation (perte) progressivement de l'énergie (initialement emmagasinée dans le condensateur) en énergie thermique par effet joule dans les résistances.

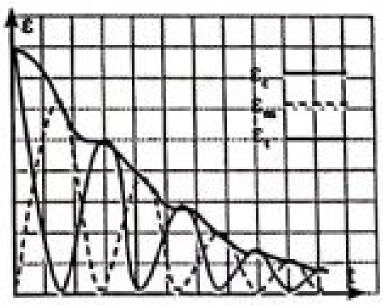
N.B :

L'amortissement est autant plus important que la résistance est élevée.

Un circuit électrique RLC, réalisé avec un condensateur chargé, est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

4 Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine :

$$E_T = Ee + Em = \frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$$



• Les oscillations correspondant à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.

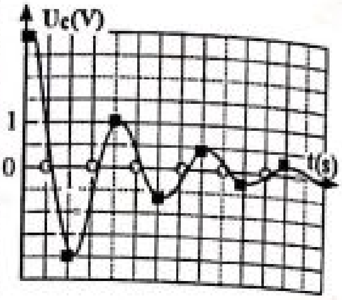
• **Le circuit (RLC) est dissipatif d'énergie :** son énergie totale ET diminue au cours du temps.

• Le phénomène d'amortissement résulte de la dissipation (perte) de l'énergie totale dans le circuit sous forme d'énergie thermique par effet joule.

Scanné avec CamScanner

❑ **Comment calculer l'énergie dissipée entre deux instants t_1 et t_2 :**

Points spécifiques sur la figure	UC	i	E_e	E_m	E_T
■	UC_m	0	$E_e = \frac{1}{2} C.U^2_{Cmax}$	0	$E_T = \frac{1}{2} C.U^2_{Cmax}$
○	0	I_m	0	$E_m = \frac{1}{2} L.I^2_{max}$	$E_T = \frac{1}{2} L.I^2_{max}$

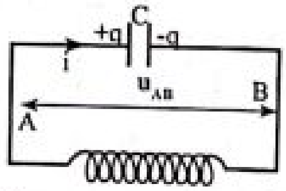


$\Delta E_T = E_T(t_2) - E_T(t_1)$: L'énergie dissipée par effet joule entre les instant t_1 et t_2.

Le circuit LC (Circuit Oscillant) :

Dipôle LC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et de charge initiale q_0 et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

1- *Montage : Décharge d'un condensateur dans une bobine :*



2- *Équation différentielle :*

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_C + U_L = 0$ et les transitions :

$q = C.U_C$ et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = C.\frac{d^2U_C}{dt^2}$ $U_L = r.i + L.\frac{di}{dt}$; $r = 0$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

Variable U_C :

$$U_C + U_L = U_C + r.i + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.\frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.C.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_C = 0$$

Variable q :

$$U_C + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{q}{c} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}.q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega 20 = \frac{1}{LC}$$

ω_0 : Pulsation propre (en rad/s).

3- *Équation horaire ou la solution :*

Soit $U_C(t)$ comme variable, la solution est :

$$U_C(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

avec

Um : L'amplitude (la valeur maximale de la tension $U_C(t)$

$\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi$: La phase à l'instant t

ϕ : La phase à l'origine des temps t = 0

T_0 : la période propre (S)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: pulsation propre (en rad/s).

Comment exploiter la 2ème loi de Newton

En règle générale, la 2ème loi de newton sert à déterminer le mouvement d'un point matériel ou d'un système de points connaissant les forces qui s'appliquent à ce point.
Pour résoudre un problème de dynamique en utilisant la 2ème loi de Newton, la méthode est toujours la même :

1-Préciser le système à étudier.

2-Faire le bilan de toutes les forces qui agissent sur le point matériel étudié (ou le centre d'inertie de l'objet étudié).

2.1- Forces de contact

2.2- Forces à distance.

3-Faire un schéma précis et suffisamment grand pour pouvoir y représenter (tant que c'est possible toutes les forces dont les caractéristiques bien connues.

*Exemples :*le poids $\vec{P}$ et $\vec{R}$ la réaction d'un plan quand les frottements sont négligeables.

4-Choisir un référentiel galiléen. Il faut toujours préciser le référentiel d'étude, c'est fondamental.

N.B : Attention pour les mouvements rectilignes et le repère de Frenet pour les mouvements curvilignes.

5-Ecrire la relation vectorielle de la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$.

6-Projeter chacune de ces forces sur les axes du référentiel (Se rappeler de la définition de la projection d'un vecteur sur un axe d'un référentiel).

N.B : La relation entre vecteur est bien identique à la relation entre composantes sur les axes.

6.1- Sur l'axe Ox : $\Sigma F_x = m.ax$.

6.2- Sur l'axe Oy : $\Sigma F_y = m.ay$.

7-Répondre !!!.

Remarque :

La projection peut se faire sur un axe ou l'autre ou les deux à la fois, ça dépend de la nature de la question (pas de priorité pour le choix de l'axe Ox).

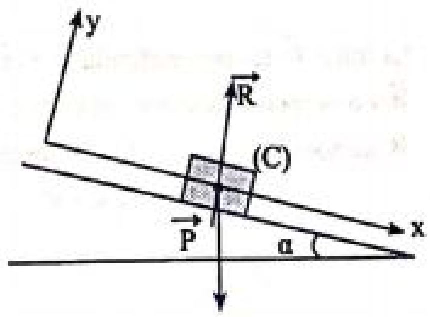
Applications :

Exemple :

Le mouvement d'un mobile de masse m, et *sans frottement* sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal :

Système : Le corps (C)

Bilan des forces : - $\vec{R}$: La réaction du plan incliné.
- $\vec{P}$: Le poids du corps (C)



En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$

D'où : $\vec{R} + \vec{P} = m\,\vec{a}_G$

physique

Projections sur les axes :

Sur Ox :

$$(1) \quad R_x + P_x = m.a_x$$

$R_x = 0$: $\vec{R}$ est perpendiculaire à l'axe Ox.

$P_x = P.\sin(\alpha) = m.g.\sin(\alpha)$

On remplace dans l'équation (1)

$$m.g.\sin(\alpha) = m.a_x$$

$$a_x = g.\sin(\alpha)$$

Sur Oy :

$$(2) \quad R_y + P_y = m.a_y$$

$Ry = R$: $\vec{R}$ est parallèle à l'axe Oy.

$Py = -P.\cos(\alpha) = -m.g.\cos(\alpha)$

$a_y = 0$: Le mouvement est rectiligne sur Ox.

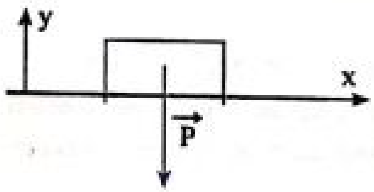
On remplace dans l'équation (2)

$$R - m.g.\cos(\alpha) = 0$$

$$R = m.g.\cos(\alpha)$$

Coordonnées du poids P d'un corps :

Mouvement sur un plan horizontal



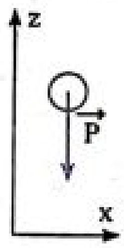
$\vec{P}$ est perpendiculaire à l'axe Ox

$P_x = 0$

$\vec{P}$ est parallèle à l'axe Oy

$P_y = -P = -m.g$

Mouvement verticale



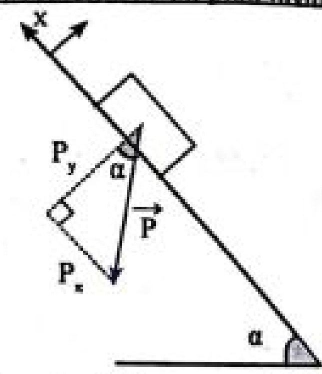
$\vec{P}$ est perpendiculaire à l'axe Ox

$P_x = 0$

$\vec{P}$ est parallèle à l'axe Oz

$P_z = -P = -m.g$

Mouvement sur un plan incliné

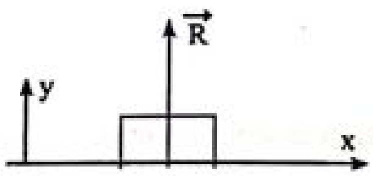


$P_x = -P.\sin(\alpha) = -m.g.\sin(\alpha)$

$P_y = -P.\cos(\alpha) = -m.g.\cos(\alpha)$

Cordonnées de la réaction R d'un plan :

Contact sans frottement (Frottement négligeable) :



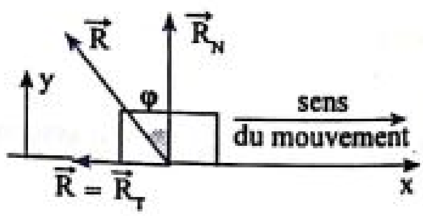
La force $\vec{R}$ est perpendiculaire à la surface de contact

$\vec{R}$ est perpendiculaire à l'axe Ox : $Rx = 0$

$\vec{R}$ est parallèle à l'axe Oy et orienté dans le même sens :

$Ry = R$

Contact avec frottement :



La force $\vec{R}$ n'est pas perpendiculaire à la surface de contact et s'oppose toujours au mouvement :

$R_x = -R_T = -f = -R.\sin(\phi)$

$R_y = RN = R.\cos(\phi)$

physique

Mouvement de projectile dans un champ de pesanteur

- Le projectile est soumis à l'unique action de son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$
- Les deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{g}$ ont le même sens et la même direction (les deux vecteurs sont colinéaires)
- La 2ème loi de Newton $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$ d'où $\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$ donc $\vec{a}_G = \vec{g}$.
- Les deux vecteurs $\vec{a}_G$ et $\vec{g}$ ont les mêmes caractéristiques.

1 Caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}_G$:

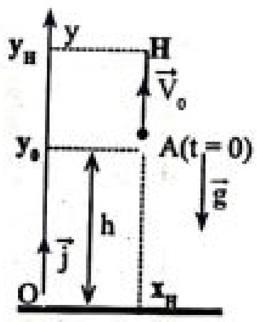
Origine : Le point G

Direction : - La droite verticale
- La même direction que $\vec{g}$ (même direction que le poids $\vec{P}$)

Sens : - Vers le bas
- Le même sens que $\vec{g}$ (même sens que le poids $\vec{P}$)

Intensité : $a_G = g$

2 Chute libre verticale :



Le vecteur vitesse $\vec{V}_G$ et le vecteur accélération $\vec{a}_G$ sont parallèles.

2.1- Coordonnées de $\vec{a}_G$ vecteur accélération :

$$a_y = -g = C^{te}$$

A l'instant t = 0

$$y_0 = h \quad \text{et} \quad V_0y = V_0$$

2.2- Nature du mouvement sur l'axe Oy :

$a_y = -g = C^{te}$: Le mouvement est rectiligne uniformément varié sur l'axe Oy

$$y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.t + y_0$$

2.3- Nature du mouvement : $V_y = -g.t + V_0$

Le mouvement du mobile est rectiligne uniformément variée.

2.4- La flèche :

La flèche est l'altitude H la plus élevée atteinte par le projectile.

- Au point H la composante de la vitesse est nulle : $V_{HY} = 0$

$V_y = -g.t_H + V_0 = 0$ d'où $t_H = \dfrac{V_0}{g}$: L'instant d'arrivée au point H et o remplace dans y(t)

$$y_H = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0.\frac{V_0}{g} + y_0 = \frac{1}{2}.\frac{V_0^2}{g} + y_0$$

y_H : Ordonnée du point H d'où : $AH = y_H - y_0 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{V_0^2}{g}$

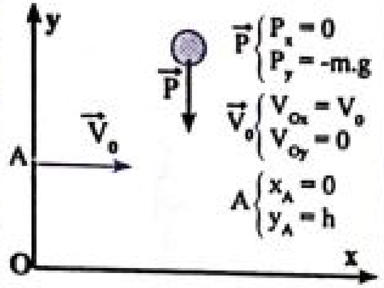
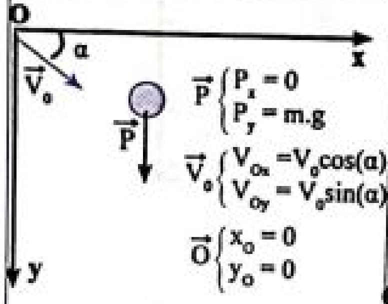
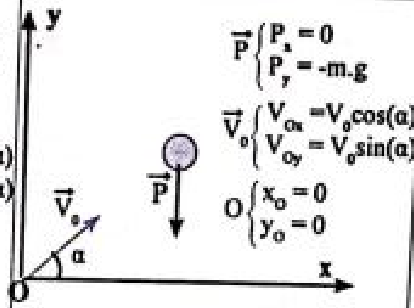
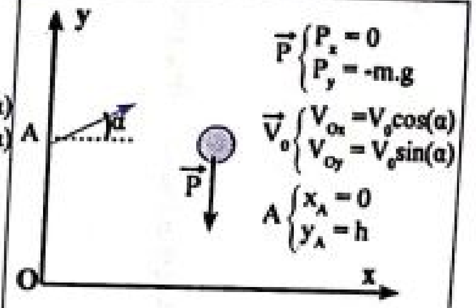
□ Exploiter les équations horaires avec une ou plusieurs informations :

Au point A :
- * y(A) = h
- * L'instant de passage par le point A est $t_A = 2.t_H = \dfrac{2.V_0}{g}$.
- * La vitesse de passage par le point A est V_0.

Au point O : * y(O) = 0

physique

Chute libre parabolique

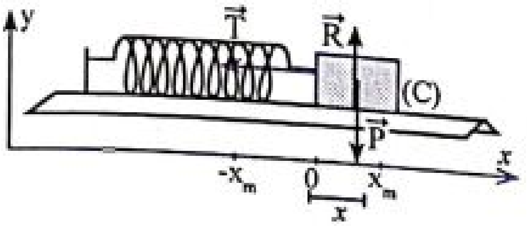
Condition initiales	 $\vec{P}\begin{cases}P_x = 0\\P_y = -m.g\end{cases}$ $\vec{V}_0\begin{cases}V_{0x} = V_0\\V_{0y} = 0\end{cases}$ $A\begin{cases}x_A = 0\\y_A = h\end{cases}$	 $\vec{P}\begin{cases}P_x = 0\\P_y = m.g\end{cases}$ $\vec{V}_0\begin{cases}V_{0x} = V_0\cos(\alpha)\\V_{0y} = V_0\sin(\alpha)\end{cases}$ $\vec{O}\begin{cases}x_0 = 0\\y_0 = 0\end{cases}$	 $\vec{P}\begin{cases}P_x = 0\\P_y = -m.g\end{cases}$ $\vec{V}_0\begin{cases}V_{0x} = V_0\cos(\alpha)\\V_{0y} = V_0\sin(\alpha)\end{cases}$ $O\begin{cases}x_0 = 0\\y_0 = 0\end{cases}$	 $\vec{P}\begin{cases}P_x = 0\\P_y = -m.g\end{cases}$ $\vec{V}_0\begin{cases}V_{0x} = V_0\cos(\alpha)\\V_{0y} = V_0\sin(\alpha)\end{cases}$ $A\begin{cases}x_A = 0\\y_A = h\end{cases}$
Coordonnées du vecteur d'accélération	$\vec{a}\begin{cases}a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0\\a_y = \frac{dv_x}{dt} = -g\end{cases}$	$\vec{a}\begin{cases}a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0\\a_y = \frac{dv_x}{dt} = g\end{cases}$	$\vec{a}\begin{cases}a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0\\a_y = \frac{dv_x}{dt} = -g\end{cases}$	$\vec{a}\begin{cases}a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0\\a_y = \frac{dv_x}{dt} = -g\end{cases}$
Coordonnées du vecteur vitesse	$\vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\\V_y = -g\,t\end{cases}$	$\vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\cos(\alpha)\\V_y = g.t + V_0\sin(\alpha)\end{cases}$	$\vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\cos(\alpha)\\V_y = -g.t + V_0\sin(\alpha)\end{cases}$	$\vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\cos(\alpha)\\V_y = -g.t + V_0\sin(\alpha)\end{cases}$
Coordonnées du vecteur position	$\vec{OM}\begin{cases}x(t) = V_0 t\\y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + h\end{cases}$	$\vec{OM}\begin{cases}x(t) = V_0\cos(\alpha)\,t\\y(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + V_0\sin(\alpha)t\end{cases}$	$\vec{OM}\begin{cases}x(t) = V_0\cos(\alpha)\,t\\y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0\sin(\alpha)t\end{cases}$	$\vec{OM}\begin{cases}x(t) = V_0\cos(\alpha)\,t\\y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0\sin(\alpha)t + h\end{cases}$
Équation de la trajectoire	$y = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{V_0}\right)^2 + h$	$y = \frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x$	$y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x$	$y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + h$

Scanné avec CamScanner

Oscillateurs Mécaniques

Équation différentielle :

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale l0 et de raideur K.



Système : solide (C).

Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort.
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C).

En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$:

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{T}\begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P}\begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m.g \end{pmatrix} \text{ et } \vec{R}\begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_G\begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox : $\mathbf{T_x + R_x + P_x = m.a_x}$

$$-T = m.\ddot{x} \text{ et } -K.\Delta\ell = m.\ddot{x} \quad \text{et} \quad -K.x = m.\ddot{x} \quad \text{d'où : } -\frac{k}{m}.x = \ddot{x}$$

Donc : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0}$: Équation différentielle de mouvement du centre d'inertie G.

L'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ou bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en rad/s).

Équation horaire ou la solution de l'équation différentielle :

$$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

ou bien :

$$x = x(t) = Xm.\cos(\omega_0.t + \phi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec

- $X(t)$: l'abscisse (élongation) du point G et varie entre X_m et $-X_m$
- X_m : Amplitude ou élongation maximale
- ω_0 : Pulsation (rad/s)
- T_0 : La période (S)
- $\omega_0.t + \phi$: Phase à l'instant t
- ϕ : Phase à l'origine des temps t = 0.

Energie mécanique Em :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, $E_m = E_C + E_{pe}$:

$$Em = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.K.x^2 + C$$

Pour les conditions décrites avant on peut écrire :

$$Em = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.K.x^2$$

à exploiter à $x = 0$ ou $V = V_m$

$$Em = \frac{1}{2}.m.V_m^2$$

Se calcul souvent à $x = X_m$ ou $V = 0$

$$Em = \frac{1}{2}.K.X_m^2$$

$E_m = E_c + E_p = C^{te}$

L'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et réciproquement

$$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}.m.V^2 + \frac{1}{2}.K.x^2$$

$$x = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

$$V_x = -xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

$$Em = \frac{1}{2}.K.X_m^2 = \frac{1}{2}.m.V_m^2$$

$-Xm$	0	Xm (x)
$Ec = 0$	$Ec = Ec_m$	$Ec = 0$
$V = 0$	$V = V_m$	$V = 0$

$Ep = Em - Ec$

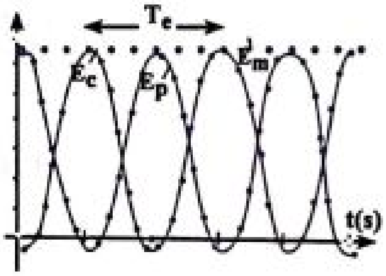
$$Ep = \frac{1}{2}.m.V_m^2 - \frac{1}{2}.m.V^2$$

$$Ep = \frac{1}{2}.m.(V_m^2 - V^2)$$

$Ec = Em - Ep$

$$Ec = \frac{1}{2}.K.X_m^2 - \frac{1}{2}.K.x^2$$

$$Ec = \frac{1}{2}.K.(X_m^2 - x^2)$$



physique

Modèles de concours avec solutions

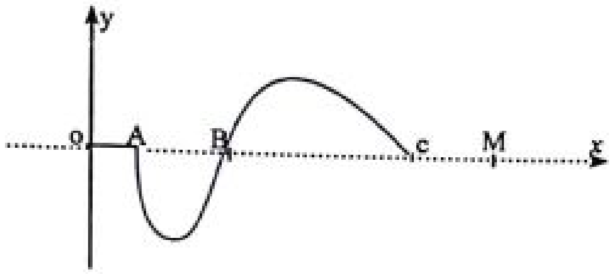
Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2017 – 2018

" Epreuve de Physique "

Exercice 1

On a schématisé sur le document ci-dessous à une date donnée t, une onde transversale se propageant le long d'une onde.



L'axe OX est confondu avec la corde au repas.
O est le point où est provoquée la perturbation à la date t = 0. Cette perturbation transversale (déplacement y) se propage à la célérité V = 20 m/s.
On donne : X_A = 100 cm ; X_B = 130 cm, X_C = 110 cm et X_M = 160 cm.

1. A quelle date l'onde quitte t-elle B ?

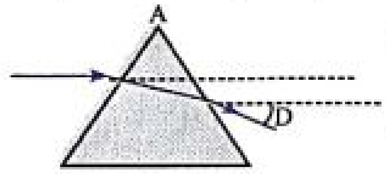
   t = ... ms

2. Définir et calculer le retard τ_B de l'onde perçue en M par rapport à celle perçue en B.

   τ_B= .... ms

Exercice 2

Un prisme en verre d'angle au sommet A = 30° reçoit un faisceau étroit d'une lumière monochromatique violette.
On donne l'indice de réfraction n du verre ce faisceau ainsi que la longueur d'onde λ de cette lumière violette : n = 1,65 ; λ = 4050 nm.
On considère le cas des angles petits, tel que : sinα ≈ α (α radian). Calculer l'angle de déviation D du rayon lumineux par le prisme.



D = ... °

Exercice 3

Une source constituée par un seul élément radioactif a une activité a = 50 GBq et une période $T_{1/2}$ = 69300 secondes.

1. Calculer sa constante radioactive λ ?

   λ = ... s^{-1}

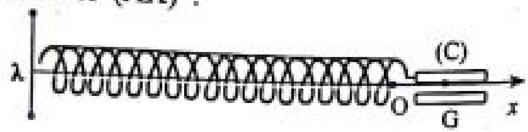
2. Au bout de combien de temps l'activité de la source sera-t-elle réduit à 1 GBq

   λ = ... s^{-1}

On donne : ln 50 = 3,91 ; ln 2 = 0,693.

Exercice 4

On dispose d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K = 10 N/m. Une des extrémités du ressort est fixée en A, l'autre est reliée à un cylindre creux de masse m = 100 g qui peut glisser sans frottement le long d'une tige horizontale (AX) :



L'abscisse x du centre d'inertie G est repérée par rapport à O, position de G à l'équilibre.
On écart C de sa position d'équilibre et on le lâche.
A l'instant t = 0 choisi pour origine des dates, x = -1cm et v = + 0,1 m/s.

Scanné avec CamScanner

1. Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur à l'instant t = 0. On considère que l'énergie potentielle de pesanteur de l'oscillateur est négligeable.

2. Déterminer la vitesse de G aux passages par la position d'équilibre O.

3. Déterminer les deux positions X_{1G} et X_{2G} de G pour lesquelles la vitesse s'annule.

On donne : $\sqrt{2} = 1,4$.

E_m = ... Joules
V_G = ... m/s
X_{1G} = ... cm
X_{2G} = ... cm

Exercice 5

Un corps S de masse m = 60 kg et de centre d'inertie G glisse sur un plan horizontal du point A au point B. S est soumis à une force de frottement constante notée *f*, tangente à la surface de glissement (parallèle à la direction du déplacement) et opposée au sens du mouvement. Sachant que G arrive au point B à l'instant $t_B = 40s$, la vitesse de S au point A est VA = 20 $m.s^{-1}$ et la vitesse de S au point B. $V_B = 12\ m.s^{-1}$.

Calculer l'intensité *f* de la force de frottement lorsque le centre d'inertie du corps S passe par le point B.

f = ... N

Solutions

Exercice 1

1. On note : $L = x_C - x_A = 10$ cm la longueur de la perturbation.

L'onde quitte le point B à la date :

$$t = \frac{x_B + L}{V}$$

$$\boxed{t = \frac{(130 + 10).10^{-2}}{20} = 0,07s}$$

2. Retard τ_B entre M et B :

$$\tau_B = \frac{BM}{V} = \frac{x_M - x_B}{V}$$

$$\tau_B = \frac{(160 - 130).10^{-2}}{20}$$

$$\boxed{\tau_B = 0,015s}$$

Exercice 2

On a : $D = i + i' - A$

Avec : $\sin i = n.\sin r \Rightarrow i = n.r$

et : $\sin i' = n.\sin r' \Rightarrow i' = n.r'$

donc : $i + i' = n(r + r') = n.A$

c'est-à-dire : $D = n.A - A$

$$\boxed{D = A(n - 1) = 19,5°}$$

Exercice 3

1. Constante radioactive : λ

$$\lambda = \frac{Ln2}{t_{1/2}} = \frac{0,69300}{69300}$$

$$\boxed{\lambda = 10^{-5}\ s^{-1}}$$

2. On a : $a = a_0 . e^{-\lambda.t}$

Donc : $t = \frac{1}{\lambda} . Ln\left(\frac{a_0}{a}\right)$

A.N : $t = \frac{1}{10^{-5}} . Ln\left(\frac{50}{1}\right)$

$$\boxed{t = 3,91.10^5\ s}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

1. Energie mécanique de l'oscillateur à t = 0

$$E_m = E_C + E_{pe}$$

$$= \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K \Delta\ell^2 \quad \text{ou : } \Delta\ell = x$$

Donc : $Em\,(t=0) = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} K x_0^2$

$$= \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times (0{,}1)^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times (-10^{-2})^2$$

$$\boxed{Em = 10^{-3}\,J}$$

2. Lors du passage du solide par la position d'équilibre, on a : $x = 0$

Donc : $E_{pe} = 0$

C'est-à-dire : $E_m = E_C = \frac{1}{2} m V_0^2$

$$V_G = \sqrt{\frac{2 E_m}{m}}$$

A.N : $V_G = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{100.10^{-3}}}$

$$\boxed{V_G = 0{,}14\ m.s^{-1}}$$

3. Si la vitesse s'annule alors :

$$E_m = E_{pe}$$

$$E_m = \frac{1}{2} K x^2$$

$$x^2 = \frac{2 E_m}{K}$$

Donc : $x_1 = \sqrt{\frac{2 E_m}{k}}$

ou : $x_2 = -\sqrt{\frac{2 E_m}{k}}$

$x_1 = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{10}}$

$= 0{,}014$ m

$$\boxed{x_1 = 1{,}4cm}$$

$x_2 = -\sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{10}}$

$x_2 = -\ 1{,}4cm$

Exercice 5

Calculons f :

D'après la deuxième loi de Newton :

$$P + f = m.\vec{a}_G$$

Faisons la projection sur l'axe horizontal (a_x) :

$$P_x + f_x = m.a_x$$

$$0 - f = m.a_x$$

Donc : $\boxed{f = -\ m.a_x}$

Où : $a_x = \frac{V_B - V_A}{t_B - t_A}$

$$a_x = \frac{12 - 20}{40 - 0} = -\ 0{,}2\ m.s^{-2}$$

$$f = -60 \times (-0{,}2)$$

$$\boxed{f = 12\ N}$$

Scanné avec CamScanner

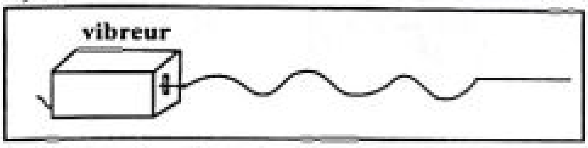
Concours d'accès 2016 – 2017

" Epreuve de Physique "

Exercice 1

On relie le bout S d'une corde flexible à un vibreur qui émet une onde progressive sinusale.

Le schéma représente l'aspect de la corde à l'instant t = 0,3s.



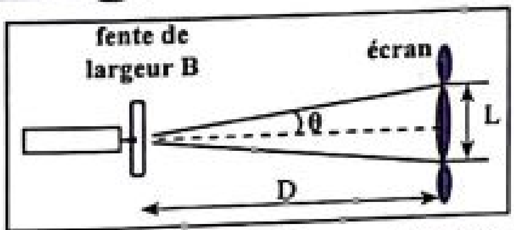
Sachant que l'onde a démarré du point S à l'instant t = 0s et que la célérité de l'onde le long de la corde est 5 m/s. Calculer la fréquence f puis la longueur λ de cette onde.

f = ... Hz
λ = ... m

Exercice 2

La vitesse de propagation d'un rayon lumineux monochromatique dans le vide est $c = 3.10^8$ m/s. Quelle est la vitesse de propagation de ce rayon dans un milieu transparent d'indice de réfraction n = 1,5. V = ... m/s

Exercice 3



Une fente de largeur a = 12 µm est éclairée par un faisceau monochromatique. On mesure la largeur de la tache centrale de diffraction L qui apparait sur un écran placé à une distance D = 1 m de la fente et on trouve L = 7 cm.

Déterminer la valeur de la longueur d'onde de la lumière utilisée.

On considère θ petit tel que tan θ = θ.

λ = ... nm

Exercice 4

Pour effectuer un examen scintigraphie, on prépare une dose de 1 MBq d'un élément radioactif de période physique (demi-vie) T = 5 minutes.

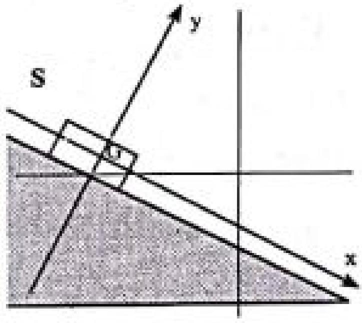
On donne : $\frac{1}{Ln2} = 1,4$

Si on administre cette activité 10 minutes après sa préparation, combien d'atomes de cet élément radioactif va-t-on administré ?

N = ... atomes

Exercice 5

Un objet solide S de masse m = 1 Kg glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{6}$ par rapport à l'horizontale.



L'objet S de déplace par rapport à un référentiel terrestre Galiléen avec une accélération constante a = 2 m.s^{-2} selon une ligne de plus grande pente et vers le bas. On donne g = 10 m.s^{-2}.

Déterminer les valeurs algébriques de R_x et R_y, les composantes parallèles et perpendiculaire au plan, de la force de frottement R qu'exerce le plan sur l'objet S.

R_x = ...
R_y = ...

Exercice 6

Le mouvement du centre d'inertie d'un projectile est caractérisé par les équations suivantes (dans le système international d'unités) :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t + 1 \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point F, le sommet de la trajectoire du projectile.

X_F = ...
Z_F = ...

Solutions

Exercice 1

- Calculons la fréquence de l'onde F :

On a : $t = 3T$ où T est la période.

Donc : $T = \frac{t}{3} = \frac{0,3}{3} = 0,1$ s.

C'est-à-dire : $f = \frac{1}{T}$

A.N : $\boxed{f = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ Hz}}$

- Calculons la longueur d'onde λ :

On sait que : $V = \lambda.F$

Donc : $\lambda = \frac{V}{f}$

A.N : $\boxed{\lambda = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ m}}$

Exercice 2

On sait que : $n = \frac{C}{V}$

Donc : $V = \frac{C}{n}$

A.N : $V = \frac{3.10^8}{1,5}$

$\boxed{V = 2.10^8 \text{ m/s}}$

Exercice 3

On sait que : $\theta = \frac{\lambda}{a}$

et : $\tan\theta = \frac{L}{2D} \Rightarrow \theta = \frac{L}{2D}$

Donc : $\frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D}$

$\lambda = \frac{L.a}{2D}$

A.N : $\lambda = \frac{7.10^{-2} \times 12.10^{-6}}{2 \times 1}$

$\lambda = 4,2 . 10^{-7}$ m

$\boxed{\lambda = 420 \text{ nm}}$

Exercice 4

On a : $N = N_0 . e^{-\lambda . t}$

Où : $N_0 = \frac{a_0}{\lambda} = \frac{a_0 . t_{1/2}}{Ln2}$ et $\lambda = \frac{Ln2}{t_{1/2}}$

A.N : $N = \frac{a_0 . t_{1/2}}{Ln2} e^{-\frac{Ln2}{t_{1/2}} . t}$

A.N : $N = 1 \times 10^6 \times 1,4 \times 5 \times 60 . e^{-\frac{10}{5} . Ln2}$

$N = 420 . 10^6 \times \frac{1}{4}$

$\boxed{N = 105 . 10^6}$

Exercice 5

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$$

Donc : $\begin{cases} P_x + R_x = ma_x \\ P_y + Ry = ma_y \end{cases}$

Où : $a_x = a = 2$ m/s² et $a_y = 0$.

Donc : $\begin{cases} R_x = ma_x - mg\sin\alpha \\ Ry = m.g.\cos\alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} R_x = 1 \times 2 - 1 \times 10 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ R_y = 1 \times 10 . \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = -3 \text{ N} \\ R_y = 5\sqrt{3} \text{ N} = 8,66 \text{ N} \end{cases}$$

Exercice 6

Au sommet de la trajectoire : $\frac{dz}{dt} = 0$

Donc : $-10 . t_F + 4 = 0 \Rightarrow t_F = 0,4$ s

C'est-à-dire : $x_F = 2 t_F^2 = 0,8$ m

$z_F = -5_F^2 + 4t_F + 1 = 1,8$ m.

Concours d'accès 2015 – 2016

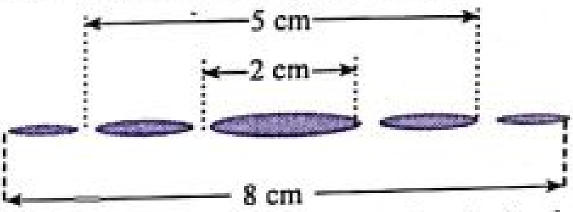
" Epreuve de Physique "

Exercice 1

Au cours d'une secousse sismique, deux types d'ondes qui se propagent ; des onde longitudinale (p) de vitesse $V_1 = 4$ Km/s et des ondes transversale (S) de vitesse $V_2 = 2$ Km/s. Un sismographe enregistre ces deux ondes un écart temporel de 20s. Quelle est la distance entre le foyer du séisme et le sismographe.

Exercice 2

Le schéma suivant représente les tâches lumineuses obtenues sur un écran distant de 2m sur une fente de largeur 100 μm, On note λ_1 la longueur d'onde de la lumière monochromatique émise :



1. Calculer en nm la longueur d'onde λ_1 de la lumière utilisée.
2. En utilisant le même montage, qu'elle est la largeur d en cm de la tâche centrale obtenue en utilisant une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 400$ nm.

Exercice 3

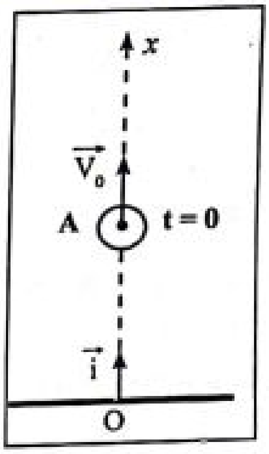
On dispose d'un échantillon radioactif d'iode 131 $\left({}^{131}_{53}I\right)$ dont la radioactivité initiale de 20 GBq. Après 8 jours la radioactivité devient égale à 10 GBq.

Sachant que les nucléides d'iode ${}^{131}_{53}I$ se transforme en ${}^{131}_{54}Xe$:

1. Ecrire l'équation de désintégration.
2. Calculer l'activité d'iode restant après 24 jours.

Exercice 4

A l'instant t = 0 ; on lance verticalement vers le haut une bille de masse 2g à partir d'un point A situé à la hauteur de 1m à la surface de la terre. La vitesse initiale de la bille est égale : 10 m/s. On néglige tous les frottements et on prend g = 10 m/s².



1. Ecrire l'équation horaire x(t) du mouvement de la bille dans le repère $(o, \vec{i})$
2. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le bille.
3. A quelle instant la bille tombe sur la terre.

On prend : $\sqrt{120} = 11$.

Exercice 5

Quand on suspend à l'extrémité libre d'un ressort (R) un solide (S) de masse m1 = 30 kg, sa longueur est L = 10 cm ; et quand on suspend un solide (S_2) de masse $m_2 = 60$ kg, sa longueur devient $L_2 = 15$cm.

On prend : g = 10 m/s².

1- Calculer en cm la longueur initiale L_0 du ressort.

2- Calculer sa raideur K.

Exercice 6

« **Vrai** ou **Faux** »

1- Le travail de force de frottement est positif.

2- Le travail du poids du corps est égal à la variation del'énergiepotentielle.

3- Quand il y a frottement, l'énergie mécanique diminue.

4- Le travail du poids du corps entre deux points A et B dépend de la trajectoire suivre entre A et B.

Solutions

Exercice 1

On a : $V_1 = \dfrac{d}{\Delta t_1}$ => pour les ondes (P)

$V_2 = \dfrac{d}{\Delta t_2}$ => pour les ondes (S)

Donc : $\Delta t_1 = \dfrac{d}{V_1}$ et $\Delta t_2 = \dfrac{d}{V_2}$

Et on a écart temporel entre les ondes (P) et (S) :

$\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1$

C'est-à-dire : $\Delta t = \dfrac{d}{V_2} - \dfrac{d}{V_1}$

$$\Delta t = d\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

$$\boxed{d = \frac{\Delta t}{\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}}$$

A.N : $d = \dfrac{20}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)}$

$$\boxed{d = 80 \text{ Km}}$$

Exercice 2

1.On a : $\theta = \dfrac{\lambda_1}{a}$ et $\theta = \dfrac{L}{2D}$

Donc : $\dfrac{\lambda_1}{a} = \dfrac{L}{2D}$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{L.a}{2D}}$$

A.N : $\lambda_1 = \dfrac{2.10^{-2} \times 100.10^{-6}}{2 \times 2}$

$\lambda_1 = 5.10^{-7}$ m

$\lambda_1 = 500$ nm.

2.On a : $\dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{d}{2D}$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{2D.\lambda}{a}}$$

A.N : $d = \dfrac{2 \times 2 \times 400.10^{-9}}{100.10^{-6}} = 0{,}016$ m

$$\boxed{d = 1{,}6 \text{ cm}}$$

Exercice 3

1.Équation de désintégration :

$${}^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{131}_{54}Xe + {}^{0}_{-1}e$$

2.On a : $a = a_0 . e^{-\frac{Ln2}{t_{1/2}}.t}$

$a = a_0 . e^{-\frac{Ln2}{8} \times 24}$ car : $t_{1/2} = 8$ jours

$a = a_0 . e^{-3\,Ln2} = \dfrac{a_0}{e^{Ln(8)}}$

Donc : $a = \dfrac{a_0}{8}$

$a = \dfrac{20}{8}$ GBq = 2,5 Bq

Exercice 4

1.Équation horaire du mouvement :

$x(t) = -\dfrac{1}{2} g.t^2 + V_0.t + x_0$

Donc : $\boxed{x(t) = -5.t^2 + 10.t + 1}$

2.Lorsque la bille atteint la hauteur maximale alors sa vitesse s'annule.

Donc : $V(t) = \dfrac{dx}{dt} = 0$

=> $-10.t + 10 = 0$

=> $t = 1$s.

On remplace dans $x(t)$:

$x = -5 \times 1^2 + 10 \times 1 + 1$

$= 5$m

Donc : $\boxed{h = 6m}$

3.Lorsque la bille tombe sur terre :

On a : $x(t) = 0$

=> $-5.t^2 + 10.t + 1 = 0$

$\Delta = (10)^2 + 4 \times 5 = 120$

$t = \dfrac{-10 - \sqrt{120}}{-2 \times 5} = 2{,}1$ s

physique

Exercice 5

1.A l'équilibre : $T = P \Rightarrow K.\Delta\ell = m.g$

Donc : $\begin{cases} K.\Delta\ell_1 = m_1.g \\ K.\Delta\ell_2 = m_2.g \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} = \dfrac{m_2}{m_1}$

Donc : $\dfrac{L_2 - L_0}{L_1 - L_0} = 2$

$\Rightarrow \quad L_2 - L_0 = 2L_1 - 2L_0$

$\Rightarrow \quad \boxed{L_0 = 2L_1 - L_2}$

A.N : $L_0 = 2 \times 10 - 15$

$\Rightarrow \quad \boxed{L_0 = 5cm}$

2.Calculons la constante de raideur K :

On a : $K.\Delta L_1 = m_1.g$

$$K = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta L_1} = \frac{30 \times 10}{0,05}$$

$K = 6000\ N.m^{-1}$.

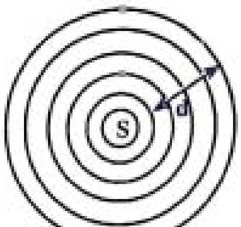
Exercice 6

1	2	3	4
Faux	Faux	Vrai	Faux

Concours d'accès 2014 – 2015

" Epreuve de Physique "

Exercice 1

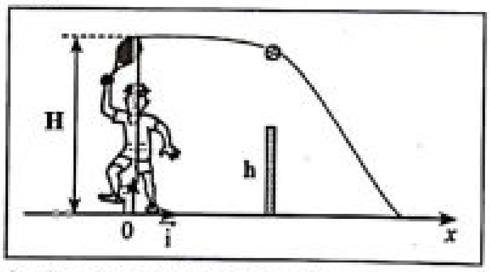


Une onde mécanique circulaire dont la fréquence N = 20 Hz se propageant sur une surface d'eau à partir d'une source S. On visualise en utilisant un stroboscope une immobilité apparente des ondes et à distance entre deux rayons d'ondes d'ordre n et n + 1 est égale d = 16 cm.

Calculer la vitesse de propagation de cette onde.

Exercice 2

Un joueur de tennis, lance une balle avec une vitesse initiale $V_0 = 20$ m/s à la hauteur H = 2,4m. On considère l'instant de lancement de la balle comme origine des dat, et on l'assimile à un point matériel.



1. Ecrire les équations horaires du mouvement dans le repère (o, x, y). On considère les frottements négligeables.
2. Ecrire l'équation de la trajectoire.
3. La hauteur du filet est : h = 115 cm à partir de la surface de terre, et il est distant de d = 12 m du joueur à l'instant du lancement.

Exprimer la vitesse minimale $V_{0\,min}$ en fonction de d, g, H et h pour avoir un bon servité (éviter de toucher le filet), Calculer sa valeur.

On donne : g = 10 m/s².

Exercice 3

Une lampe émis une lumière dont les longueurs d'onde dans le vide $\lambda_1 = 400$ nm. Cette lumière se propage du vide vers une fibre optique d'indice de réfraction n = 1,875.

1. Calculer la fréquence ν, la vitesse de propagation V et la longueur λ_2 dans le fibre optique.

On donne : $C = 3.10^8$ m/s.

2. Cette lumière arrive sur un prisme d'angle A = 30°.

Pour les petits angles on prend $\sin\alpha = \alpha$.

Calculer l'angle de déviation D, sachant que l'indice de réfraction du verre de prisme pour cette lumière est : $n_2 = 1{,}6$.

Exercice 4

La désintégration du noyau d'Uranium $^{238}_{92}U$, conduit à la formation du noyau du radon $^{222}_{86}Rn$ et des particules α et β^-.

Déterminer le nombre de désintégrations de type α et le nombre de désintégration de type β^-.

Exercice 5

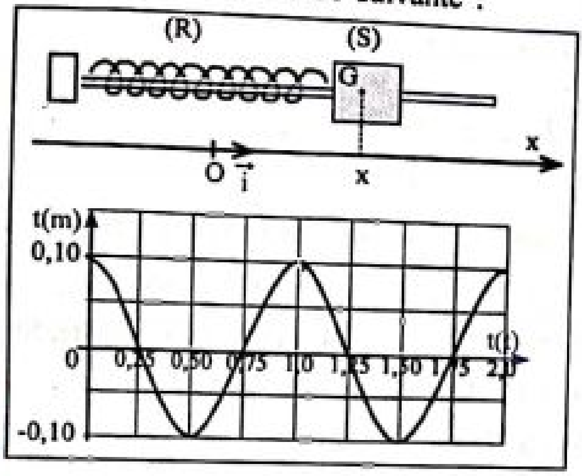
Un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G glisse sans frottement sur un tige horizontale. Ce solide est attaché à un ressort à spires non jointives et de raideur K = 4 N.m⁻¹. Le système {Solide S – ressort horizontale} forme un oscillateur élastique horizontale non amortie. On néglige la masse du ressort devant la masse m du solide (S) et on prend: $\pi^2 = 10$.

On étudie le mouvement de (S) dans un repère galiléen. La position d'équilibre de (S) coïncide avec l'origine de repère O. On écart le solide de

Scanné avec CamScanner

sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale à l'instant t = 0.

On enregistre les positions de G en fonction du temps, on obtient la courbe suivante :



1. Sachant que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $x(t) = x_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

Déterminer x_m ; ϕ et m.

2. Exprimer l'énergie mécanique Em du système en fonction de K, m, x et $\frac{dx}{dt}$

3. En utilisant la courbe, déterminer les instant où l'énergie potentielle élastique est minimal.

4. Calculer l'énergie mécanique du système.

Solutions

Exercice 1

On a : $V = \lambda . N$

Donc : $d = 4 . \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{d}{4} = \frac{16}{4} = 4\text{cm}.$

Donc : $V = 4.10^{-2} \times 20$

$$\boxed{V = 0{,}8 \text{ m/s}}$$

Exercice 2

1. Les deux équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} x(t) = V_0.t \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + H \end{cases}$$

Où : $\begin{cases} x(t) = 20.t \\ y(t) = -5.t^2 + 2{,}4 \end{cases}$

2. Équation de la trajectoire :

On a : $x = V_0.t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0}$

On remplace dans y(t) :

$$\boxed{y = -\frac{g}{V_0^2}.x^2 + H}$$

Où : $\boxed{y = -0{,}0125 . x^2 + 2{,}4}$

3. On remplace x par d = 12m et y par h = 115 cm = 1,15m

$$h = -\frac{g.d^2}{2V_0^2} + H$$

$$\frac{g.d^2}{2V_0^2} = (H - h)$$

$$2V_0^2 (H - h) = g.d^2$$

$$\boxed{V_0 = V_{0min} = \sqrt{\frac{g . d^2}{2(H - h)}}}$$

$$V_{0min} = \sqrt{\frac{10 \times 12^2}{2(2{,}4 - 1{,}15)}}$$

$$\boxed{V_{0min} = 24 \text{ m/s}}$$

Exercice 3

1. On a : $C = \lambda_1.\nu \Rightarrow \nu = \frac{C}{\lambda_1}$

$$\nu = \frac{3.10^8}{400.10^{-9}} = 7{,}5.1014 \text{ Hz}$$

- On a : $n = \frac{C}{V}$

$$\Rightarrow V = \frac{C}{n} = \frac{3.10^8}{1{,}875}$$

physique

$$V = \frac{300}{1,875} \cdot 10^6$$

$V = 160 \cdot 10^6 \Rightarrow \boxed{V = 1,6.10^8 \text{ m/s}}$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{400}{1,875} = \frac{400}{300} \times \frac{300}{1,875}$$

$\lambda_2 = 1,33 \times 160 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 212,8 \text{ nm}}$

3.On a : $D = i + i' - A$

$$\begin{cases} \sin i = n_2.\sin r \Rightarrow i = n_2.r \\ \sin i' = n_2.\sin r' \Rightarrow i' = n_2.r' \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad i + i' = n_2(r + r') = n_2.A$

Donc : $D = n_2 A - A$

$\boxed{D = A(n_2 - 1)}$

$D = 30(1,6 - 1)$

$\boxed{D = 18°}$

Exercice 4

On a :

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + x\,{}^{4}_{2}He + y\,{}^{0}_{-1}e$$

D'après les lois de Soddy :

$$\begin{cases} 238 = 222 + 4x \\ 92 = 86 + 2x - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Exercice 5

1.On a : $x(t) = x_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

Graphiquement : $x_m = 0,10\text{m}$; $\phi = 0$

On sait que : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{T_0^2 . K}{4\pi^2}}$$

A.N : $m = \frac{1^2 \times 4}{4 \times 10} \Rightarrow \boxed{m = 0,1 \text{ kg}}$

2.Energie mécanique :

$E_m = E_C + E_{pe} + E_{pp}$ où : $E_{pp} = 0$

$$E_m = \frac{1}{2}\, m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}.K.x^2$$

3. L'énergie mécanique est constante, car elle se conserve en absence des frottements.

- L'énergie potentielle élastique est minimale, Si $x = 0$, c'est-à-dire dans les instants :

0,25s ; 0,75s ; 1,25s ......

4.Calculons l'énergie mécanique :

$$E_m = E_{pe(max)}$$

$$E_m = \frac{1}{2}.K.x^2_{max}$$

A.N : $E_m = \frac{1}{2}.4 \times (0,1)^2$

$\boxed{Em = 2.10^{-2} \text{ J}}$

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2013

" Epreuve de Physique "

Exercice 1

L'iode radioactif ${}^{131}_{53}I$ est utilisé pour le traitement des maladies de ....

Sachant que l'iode 131 émis des rayonnement β^- :

1.Ecrire l'équation de désintégration, sachant que le rayon fils est Xe.

2.Calculer l'énergie de liaison en (J), puis en (MeV) du noyau ${}^{131}_{53}I$.

3.On considère un échantillon d'iode 131, dont l'activité initiale à t = 0 est : 370 MBq.

a-Combien de noyau N à t = 48h.

b-Quelle est la masse restante après 48 heures.

Données :

$m_p = 1{,}00728\mu$; $m_n = 1{,}00866\mu$;

$m({}^{131}I) = 2{,}173279.10^{-25}$ kg

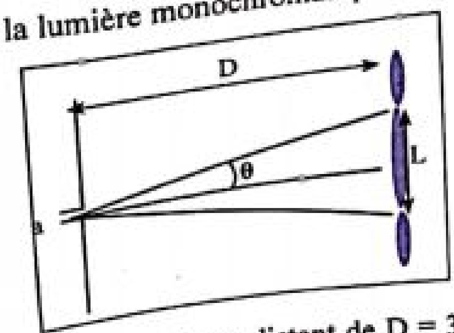
$M(131I) = 131$ g.mol^{-1} ; $t_{1/2}({}^{131}I) = 8{,}1$ Jours.

$1\mu = 1{,}66054 . 10^{-27}$ kg ; 1MeV = $1{,}6 . 10^{-13}$ J ;

NA = 6,02 . 1023 mol^{-1}.

Exercice 2

Pour déterminer la longueur λ d'une onde lumineuse, on éclaire une fente de largeur $a = 5.10^{-5}$m par un faisceau la lumière monochromatique.



On observe sur un écran distant de D = 3m de la fente des franges brillantes et d'autres sombres. La largeur de la tâche centrale est : $L = 7{,}6 . 10^{-2}$m.

1.Exprimer en fonction de L et D l'écart angulaire θ entre le milieu de la frange centrale et le début de la frange sombre.

2.Calculer λ :

On prend : $\tan\theta = \theta$; pour θ petite.

Exercice 3

On considère une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 656$ nm. L'indice de réfraction de verre, ce rayonnement est : n = 1,612.

1.Calculer la fréquence V de ce rayonnement.

Calculer la célérité V de cette lumière dans le verre.

S'agit-elle d'une lumière visible ?

Exercice 4

On dispose d'un circuit électrique composé d'un générateur GBF, d'un conducteur ohmique de résistance R = 300Ω, d'une bobine d'inductance L_0 et de résistance négligeable (Figure 2). On visualise la tension U_1 aux bornes de la bobine sur la voie Y_1 et la tension U_2 aux bornes du conducteur ohmique sur la voie Y_2, on obtient alors les courbes représentées sur les figures 3 et 4.

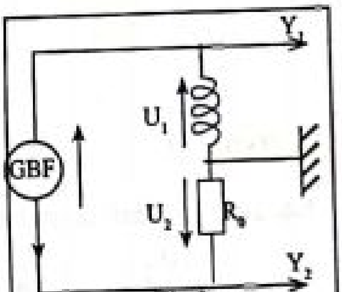


Fig.2

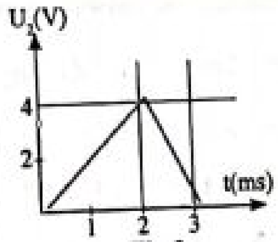


Fig.3

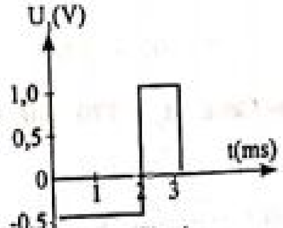


Fig.4

physique

Scanné avec CamScanner

1. Indiquer parmi les courbes $U_1(t)$ et $U_2(t)$ quelle est celle qui permet de visualiser intensité du courant i(t), Justifié votre réponse.

2. Sachant que la tension U_1 s'écrit sous la forme: $U_1 = -\frac{L_0}{R} \cdot \frac{dU_2}{dt}$, et en utilisant les courbes U_1 et U_2, Calculer L_0.

Exercice 5

Un corps solide (S) de centre d'inertie G et de masse m_s glisse sur un plan incline d'un angle α par rapport au plan horizontal comme montré sur la figure 5.

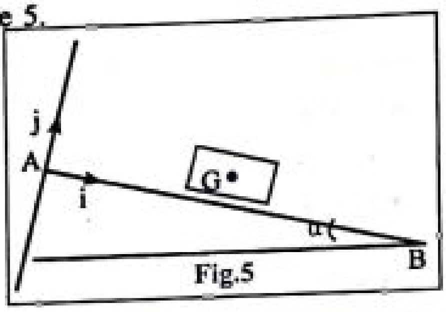


Fig.5

A l'instant t = 0, on lâche le solide depuis la position A sans frottement sur AB.

On étudie le mouvement de G dans repère Galilien R(A, i, j). en utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer :

1. Les coordonnés du vecteur d'accélération $\vec{a}_G$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

2. V_B la vitesse au point B.

3. L'intensité de la force R exercée par le plan AB sur le solide (S).

On donne :

$m_s = 70$ kg ; $g = 9{,}8$ m/s² ; AB = 2,4 m ; α = 20°.

Solutions

Exercice 1

1. Équation de désintégration :

$$^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{131}_{54}Xe + {}^{0}_{-1}e$$

2. Energie de liaison du noyau : $^{131}_{53}I$

$$E_\ell = \left[Z.mp + (A-Z) . m_n - m\left(^{131}_{53}I\right)\right] . C^2$$

$$E_\ell = [(53 \times 1{,}00728 + (131-53) \times 1{,}00866) \times 1{,}66054.10^{-27} - 2{,}173279 . 10\text{-}25] \times (3.108)^2$$

$$\boxed{E_\ell = 1{,}7686 . 10^{-10}\ J}$$

$$\boxed{E_\ell = 1105{,}43\ MeV}$$

3. a- On a : $a_0 = 370 . 10^6$ Bq et $t_{1/2} = 8{,}1$ Jours.

On a : $N = N_0 . e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow N = \frac{a_0 . t_{1/2}}{Ln2} . e^{-\left(\frac{Ln2}{t_{1/2}} . t\right)} \quad \text{car : } \lambda = \frac{Ln2}{t_{1/2}}$$

A.N : $N = \frac{8{,}1 \times 24 \times 3600}{Ln2} . e^{-\left(\frac{Ln2}{8{,}1 \times 24} \times 48\right)}$

$$\boxed{N = 3{,}15 . 10^{14}}$$

Exercice 2

1. Expression de θ en fonction de L et D :

$$\boxed{\theta = \frac{L}{2D}}$$

2. On a : $\theta = \frac{\lambda}{2D}$

Donc : $\frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{L.a}{2D}}$$

A.N : $\lambda = \frac{7{,}6 . 10^{-2} \times 5.10^{-5}}{2 \times 3}$

$$\boxed{\lambda = 6{,}33 . 10^{-7}\ m = 633\ nm}$$

physique

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1. On a : $C = \lambda.\nu$

$\Rightarrow \quad \nu = \dfrac{C}{\lambda}$

A.N : $\nu = \dfrac{3.10^{8}}{565.10^{-9}}$

$\boxed{\nu = 4{,}57 \,.\, 10^{14}\ Hz}$

2. On a : $n = \dfrac{C}{V} \Rightarrow V = \dfrac{C}{n}$

A.N : $V = \dfrac{3.10^{8}}{1{,}612}$

$\Rightarrow \boxed{V = 1{,}86.10^{8}\ m/s}$

3. Comme $400\ nm \leq \lambda \leq 800\ nm$ donc cette lumière appartient au domaine visible.

Exercice 4

1. La courbe permettant de visualiser l'intensité de courant est : $U_2(t)$ car :

$U_2(t) = R.i(t)$ est proportionnelle à $i(t)$.

2. Dans l'intensité : [0, 2ms] :

$U_1 = -0{,}5V$

et $\dfrac{dU_2}{dt} = \dfrac{\Delta U_2}{\Delta t} = \dfrac{4-0}{(2-0).10^{-3}} = 2.10^{3}\ V/s$

Et on a : $U_1 = -\dfrac{L_0}{R} \cdot \dfrac{dU_2}{dt}$

$\Rightarrow \quad L_0 = -\dfrac{R.U_1}{\left(\dfrac{dU_2}{dt}\right)}$

A.N : $L_0 = -\dfrac{300 \times (-0{,}5)}{2.10^{3}}$

$\boxed{L_0 = 7{,}5 \,.\, 10^{-2}\ H}$

Exercice 5

1. Les coordonnées de $\vec{a}_0$:

$\begin{cases} ax = g.\sin\alpha \\ ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = 3{,}35\ m/s^2 \\ ay = 0 \end{cases}$

2. On a :

$V_B^2 - V_A^2 = 2.ax \,.\, AB$

$V_B^2 = V_A^2 + 2.ax \,.\, AB$

On a : $V_A = V_0 = 0$

Donc : $V_B = \sqrt{2 \times 2{,}4 \times 3{,}35}$

$\boxed{V_B = 4\ m.s^{-1}}$

3. On a : $\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_0$

Projection sur l'axe : (oy) :

$P_y + R_y = m.ay$

$-m.g.\cos\alpha + R = 0$

$\boxed{R = m.g.\cos\alpha}$

A.N : $R = 70 \times 9{,}8 \times \cos(20)$

$\boxed{R = 644{,}6\ N}$

physique

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2012

" Epreuve de Physique "

Exercice 1

Une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 600$ nm, se propage dans le vide à la vitesse $C = 3.108$ m.s^{-1}.

1. Calculer la fréquence ν de cette lumière :

$\nu =$ ....

2. Cette lumière se propage dans le verre, d'indice de réfraction $n = 1.5$.

2.1- Calculer la vitesse de propagation dans le verre :

$v =$ ....

2.2- Calculer la longueur d'onde λ dans le verre :

$\lambda =$ ....

Exercice 2

La désintégration du noyau de polonium ${}^{210}_{84}Po$ donne naissance à une particule α et un noyau fils ${}^{A}_{Z}Pb$ selon la réaction :

$${}^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{A}_{Z}Pb + {}^{4}_{2}He$$

1. Calculer les valeurs de A et Z :

A = ... Z = ...

2. Déduire dans le système international des unités, la valeur de la constante radioactive λ du noyau ${}^{210}_{84}Po$, sachant que la demi-vie radioactive ($t_{1/2}$) est de 138 j.

$\lambda =$ ....

3. On prépare un échantillon radioactif d'activité $a_0 = 5$Bq à l'instant $t = 0$ de sa préparation.
Calculer la masse m_0 de ${}^{210}_{84}Po$ nécessaire pour préparer cet échantillon, sachant qu'il se compose uniquement d'atomes de ${}^{210}_{84}Po$.

$m_0 =$ ....

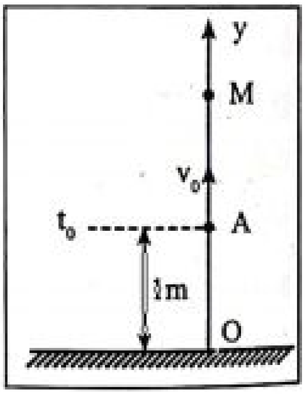
4. Calculer l'activité de cet échantillon à l'instant $t = 30$ j.

$a =$ ....

On donne nombre d'Avogadro
$N_A = 6{,}02.10^{23}$ $M(P_o) = 210$ g.mol^{-1} $\mathrm{Ln}2 = 0{,}7$

Exercice 3

On lance verticalement vers le haut un corps solide avec une vitesse $v_0 = 5$m.s^{-1} à la date $t = 0$ à partir d'un point A situé à la distance OA = 1m de l'origine de l'axe Oy orienté positivement vers le haut. Le corps solide s'arrête au point M.
On néglige les effets de résistance l'air.



1. Calculer l'accélération a_0 du centre de gravité G du solide.

$a_0 =$ ....

2. Ecrire l'expression de la vitesse v(t) et de trajectoire y(t) du centre de gravité G.

v(t) = ...
y(t) = ...

3. Déduire le temps t_M correspondant à la position maximale y_M atteinte par le solide.

$t_M =$ ....

Scanné avec CamScanner

4. Calculer la hauteur maximale y_M atteinte par le solide.

y_M = ...

5. Déterminer l'instant t_f de la chute de solide sur le sol (au point O).

t_f = ...

Exercice 4

La tension aux bornes d'un condensateur (fig.1) est exprimée par la relation $u(t) = U(1 - e^{-t/\tau})$.

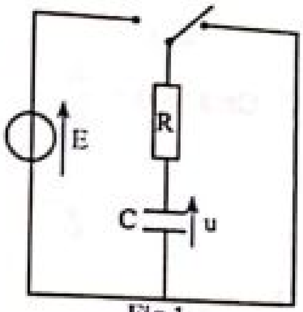


Fig.1

1. Calculer u(t) à l'instant t = 0 et à l'instant t = ∞.

$u(t = 0)$ = ... $u(t = \infty)$ = ...

Est-ce que le condensateur et en état de charge ou de décharge ?

2. Donner l'expression de la charge q du condensateur.

q = ...

3. Calculer l'intensité de courant dans le régime permanent :

i = ...

Solutions

Exercice 1

1. On a : $C = \lambda_0 . \nu$

Donc : $\nu = \dfrac{C}{\lambda_0}$

A.N : $\nu = \dfrac{3.10^8}{600 \times 10^{-9}}$

$$\boxed{\nu = 5.10^{14}\ Hz}$$

2.1- On a : $n = \dfrac{C}{V}$ donc : $V = \dfrac{C}{n}$

A.N : $V = \dfrac{3.10^8}{1,5}$

$$\boxed{V = 2.10^8\ m/s^{-1}}$$

2.2- $n = \dfrac{\lambda_0}{\lambda}$

$\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n}$

$\lambda = \dfrac{600\ nm}{1,5}$ $\boxed{\lambda = 400\ nm}$

Exercice 2

1. Équation de désintégration :

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{A}_{Z}Pb + {}^{4}_{2}He$$

D'après la lois de conservation de Soddy :

$$\begin{cases} 210 = A + 4 \\ 84 = Z + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 206 \\ Z = 82 \end{cases}$$

2. On a : $\lambda = \dfrac{Ln2}{t_{1/2}}$

A.N : $\lambda = \dfrac{0,7}{138 \times 24 \times 3600}$

$$\boxed{\lambda = 5,87 . 10^{-8}\ s^{-1}}$$

3. On a : $n_0 = \dfrac{m_0}{M(Po)} = \dfrac{N_0}{N_A}$

$m_0 = \dfrac{N_0\, M(Po)}{N_A} = \dfrac{a_0 . M(Po)}{\lambda . N_A}$

A.N : $m_0 = \dfrac{5 \times 210}{5,87 . 10^{-8} \times 6,02 . 10^{23}}$

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{m_0 = 2{,}97 \cdot 10^{-14}\ g}$$

4. On a : $a = a_0 \cdot e^{-\lambda.t}$

$$a = 5 \times e^{-(5{,}87 \cdot 10^{-8} \times 30 \times 24 \times 3600)}$$

$$\boxed{a = 4{,}29\ Bq}$$

Exercice 3

1. D'après la 2ème Loi de Newton :

$$\vec{P} = m.\vec{a}_0$$

$$\cancel{m}\vec{g} = \cancel{m}\vec{a}_0$$

$$\vec{a}_0 = \vec{g}$$

Projections sur l'axe (Oy) :

$$\boxed{a_0 = -g = -10\ m/s^2}$$

2- Équation de horaire de vitesse :

$$V(t) = a_0.t + V_0$$

$$\boxed{V(t) = -10.t + 5}$$

- Équation horaire :

$$(t) = \frac{1}{2} a_0.t^2 + V_0.t + x_0$$

$$\boxed{(t) = -5.t^2 + 5.t + 1}$$

3. Lorsque le solide atteint la hauteur maximale :

$V(t_M) = 0$

$\Rightarrow -10t_M + 5 = 0$

$$\boxed{t_M = 0{,}5\ s}$$

4. $y_M = -5.t_M^2 + 5.t_M + 1$

$$y_M = -5 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}5 + 1$$

$$\boxed{y_M = 2{,}25\ m}$$

5. Quand le solide tombe sur le sol : $y = 0$.

Donc : $-5.t^2 + 5t + 1 = 0$

$$\Delta = 5^2 + 4 \times 1 \times 5 = 45$$

$$\boxed{t_f = 1{,}17\ s}$$

Exercice 4

1. On a : $u(t) = U\,(1 - e^{-t/\tau})$

$U\,(t = 0) = U(1 - e^0) = 0$

$U(t = \infty) = U(1 - e^{-\infty}) = U$

Le condensateur est état de charge.

2. Expression de la charge q :

$$q(t) = C.UC(t)$$

$$q(t) = C\,U\,(1 - e^{-t/\tau})$$

3. On a : $i(t) = \frac{dq}{dt}$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{CU}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{U}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

En régime permanant $\quad t \to +\infty$

Donc : $i\,(t \to \infty) = 0$

physique

Scanné avec CamScanner

Concours d'accès 2010

" Epreuve de Physique "

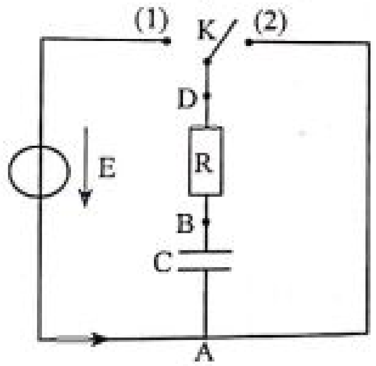
Exercice 1

On considère que les frottements sont négligeables et on donne $g = 10\ ms^{-2}$.
A la date $t = 0$, on laisse tomber un corps (S_1) d'une hauteur h par rapport à la terre, sans vitesse initiale. Après 2 secondes, on laisse tomber un autre corps (S_2) de la même position dans les mêmes conditions que S_1 et sans vitesse initiale.
Calculer la distance qui sépare (S_1) et (S_2) après 3 secondes de la chute de corps (S_1).

....

Exercice 2

Le condensateur représenté dans le schéma ci-dessus n'est pas chargé initialement. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$ (K en position (1)).



1. Calculer la tension u_{AB} aux bornes du condensateur :

a- A l'instant $t = 0$:

$u_{AB}(0) =$ ....

b- A l'instant $t = \infty$:

$u_{AB}(\infty) =$ ....

2. Exprimer la tension u_{BD} aux bornes de la résistance R en fonction de R, C et u_{AB}.

$u_{BD} =$ ....

3. Déduire l'équation de u_{AB} en fonction du temps :

$u_{AB} =$ ....

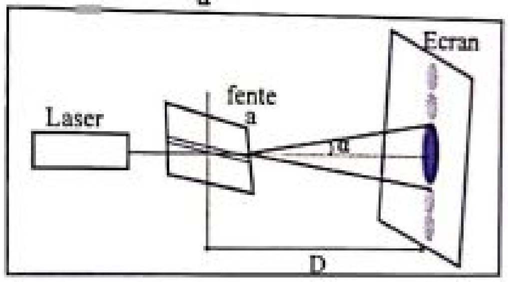
Exercice 3

On place horizontalement une fente de largeur (a) devant une lumière de longueur d'onde λ. On observe sur l'écran une série de tâches lumineuses verticales dont la tâche centrale est plus brillante et de largeur (ℓ).

1. Citer le phénomène subit par la lumière Laser.

....

2. On exprime l'angle α représenté sur le schéma par la relation $\alpha = \dfrac{\lambda}{a}$ (1)



a. Que représente l'angle α ?

....

b. Donner les unités des grandeurs de la relation (1).

$\alpha =$ $\lambda =$ $a =$

c. Expliquer comment varie la largeur de la tâche centrale (l) quand on diminue la largeur de la fente (a).

3. Donner la relation entre l'angle α, la largeur de la tâche centrale (l) et la distance D.

....

On considère que α est très petit : $tg\ \alpha = \alpha$

physique

Exercice 4

La désintégration de l'iode radioactif artificiel $^{131}_{53}I$ donne un noyau fils $^{A}_{Z}X$ et émet une particule β^-.

1. Ecrire la relation de désintégration de $^{131}_{53}I$

$^{131}_{53}I \longrightarrow$

2. Calculer A et Z de noyau fils $^{A}_{Z}X$.

A = Z =

Solutions

Exercice 1

- Dans le cas de chute libre, l'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié s'écrit :

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.t + z_0$$

Où : $g = 10\ m/s^2$; $V_0 = 0$ et $z_0 = 0$

Donc : $\boxed{z(t) = 5.t^2}$

* Après 3 seconde de chute de (S_1), la distance parcourue est : $z_1 = 5 \times 3^2 = 45m$.

* Les durée de chute de (S_2) est : $t_2 = t_1 - 2(s)$

C'est-à-dire : $t_2 = 1(s)$

La distance parcourue par (S_2) pendant 1(s) est :

$$z_2 = 5.t_2^2 = 5 \times 1^2 = 5m.$$

Donc la distance qui s'épate (S_1) et (S_2) après 3(s) de chute de (S1) (écart d'une seconde) est :

$$d = z_1 - z_2 = 45 - 5$$

$$\boxed{d = 40\ m}$$

Exercice 2

1. a- Comme le condensateur n'est pas chargé initialement : $\boxed{U_{AB}(0) = 0}$

b- A la fin de charge : $\boxed{U_{AB}(\infty) = E}$

2. On a : $U_{BD} = R.i$

$\Rightarrow U_{BD} = R.\frac{dq}{dt}$

$$U_{BD} = R\,C.\frac{dU_{AB}}{dt} \quad \text{car : } q = C.U_{AB}$$

3. On a : $U_{AB} = E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

Exercice 3

1. Nom du phénomène : Diffraction de la lumière monochromatique par une fente.

2. a- α représente l'écart angulaire.

b- $\begin{cases} \alpha \text{ en (rad)} \\ \lambda \text{ en (m)} \\ a \text{ en (m)} \end{cases}$

c- Si a diminué, ℓ augmente.

3. On a : $\tan\alpha = \frac{L}{2D}$

Donc : $\boxed{\alpha = \frac{L}{2D}}$

Exercice 4

1. Équation de désintégration :

$$^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e$$

2. D'après les lois de Soddy :

$$\begin{cases} 131 = A + O \\ 53 = Z - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 131 \\ Z = 54 \end{cases}$$

physique

Concours d'accès 2009

" Epreuve de Physique "

Exercice 1

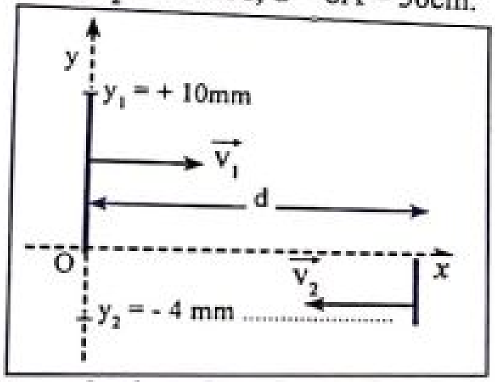
Une onde transversale d'élongation $y_1 = 10mm$, se propage à la vitesse v_1 le long d'un axe ox.

Une deuxième onde d'élongation $y_2 = -4mm$, se propage à la vitesse v_2 en sens inverse, sur le même axe.

A l'instant t = 0s, les ondes (1) et (2) se trouvent respectivement en positions o et A.

On donne :

$v_1 = 30cm/s$, $v_2 = 20cm/s$, d = oA = 50cm.



1. Ecrire x, abscisse du point M lieu de rencontre des deux ondes, en fonction de : v_1, v_2, d.

x = ...

2. Calculer l'élongation y de l'onde résultante au point M

y = ...

3. Calculer t_M, la date de rencontre des deux ondes au points M.

t_M = ...

Exercice 2

L'Uranium $^{238}_{92}U$ subit une série de désintégrations naturelles successives représentées par l'équation bilan suivante :

$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\ {}^{4}_{2}He^{-} + y\ {}^{0}_{-1}e$$

1. Calculer x et y :

x = | y =

2. On considère un échantillon d'uranium $^{238}_{92}U$ contenant $N_0(U)$ noyaux à la date t = 0s. Le nombre de noyaux N(Pb) de plomb $^{206}_{82}Pb$ formés à la date t, représente 3/4 du nombre initial $N_0(U)$: (N(Pb) = 3/4 N0(U)).

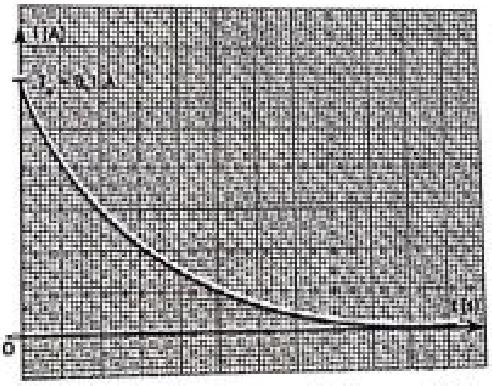
2.1- Exprimer N(Pb) en fonction de N0(U), t, λ (constante radioactive de 23892U)

N(Pb) =..

2.2- Exprimer la date t en fonction de $t_{1/2}$: demi-vie $^{238}_{92}U$.

t =..

Exercice 3



On représente sur la figure ci-dessus l'intensité du courant électrique qui traverse le circuit RC au cours de la charge du condensateur de capacité C = 1μF sous une tension constante E = 10V.

1. Ecrire l'intensité i à la date t en fonction de R, C, E et t.

i =

physique

Scanné avec CamScanner

2. Calculer R :

R =

3. Exprimer i1 à la date $t_1 = RC$ en fonction de I_0 et e(e = 2,71).

$i_1 =$

4. Exprimer l'énergie emmagasinée dans le condensateur à la date $t_2 = RC.Ln2$ en fonction de CD et E.

$\xi =$

Exercice 4

Un solide ponctuel de masse m = 100g est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est : $\vec{F} = 0{,}2\vec{i} + 0{,}4\vec{j}$.

On considère que le mouvement s'effectue dans le plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$ et à l'instant t = 0s, le solide se trouve à la position initiale o du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = 4\vec{i} + 8\vec{j}$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération a du solide dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

$a_x =$ $a_y =$

2. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du solide à la date t :

$v_x =$ $v_y =$

3. Ecrire l'équation $y = f(x)$ de la trajectoire du solide dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$:

y =

Solutions

Exercice 1

1. Célérité de l'onde (1) : $V_1 = \frac{x}{t_M - t_0}$

Célérité de l'onde (2) : $V_2 = \frac{d - x}{t_M - t_0}$

D'après les deux relations, on déduit :

$$\frac{x}{V_1} = \frac{d-x}{V_2}$$

$$\Rightarrow \frac{d-x}{x} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{d}{x} = \frac{V_2}{V_1} + 1$$

$$\boxed{x = \frac{d}{\frac{V_2}{V_1} + 1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{d.V_1}{V_2 + V_1}}$$

A.N : $x = \frac{50 \times 30}{(20 + 30)}$

$$\boxed{x = 30 \text{ cm}}$$

2. On a : $y = y_1 + y_2 = 10 - 4 = 6mm$

3. On a : $t_M = \frac{x}{V_1}$

$$t_M = \frac{30}{30} \Rightarrow \boxed{t_M = 1s}$$

Exercice 2

1. On a :

$$^{238}_{92}U \longrightarrow\ ^{206}_{82}Pb + x\ ^{4}_{2}He^{-} + y\ ^{0}_{-1}e$$

D'après les lois de Soddy :

$$\begin{cases} 238 = 206 + \varphi x \\ 92 = 82 + 2x - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{238 - 206}{4} = 8 \\ y = 82 + 2x - 92 \end{cases}$$

physique

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

2.1- On a : $N(Pb) = N0(U) - N(U)$

$$N(Pb) = N_0(U) - N_0(U) - N_0(U) \cdot e^{-\lambda.t}$$

Donc : $\boxed{N(Pb) = N_0(U)\,(1 - e^{-\lambda.t})}$

2.2- à la date t : On a : $N(Pb) = \frac{3}{4} N_0(U)$

Donc : $\frac{3}{4} \cancel{N_0(U)} = \cancel{N_0(U)}\ (1 - e^{-\lambda.t})$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$- \lambda .t = -Ln4 \Rightarrow \lambda .t = 2.Ln2$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2.\frac{Ln2}{\lambda} = 2.t_{1/2}}$$

Exercice 3

1. Expression de l'intensité i(t) :

$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} . e^{-t/\tau}}$ où $\tau = R.C$

2. On a : $I_0 = \frac{E}{R}$

$$\Rightarrow R = \frac{E}{I_0}$$

A.N : $R = \frac{10}{0,1}$

$$\boxed{R = 100\Omega}$$

3. $i(t_1) = I_0.e^{-t1/RC}$

$$= I_0.e^{-RC/RC}$$

$$\boxed{i(t_1) = I_0.e^{-1} = \frac{I_0}{e}}$$

4. On a : $\xi = \frac{1}{2}\ C.U_C^2$

où : $U_C(t) = E\,(1 - e^{-t/RC})$

$$U_C(t_2) = E\left(1 - e^{-\left(\frac{RC.Ln2}{RC}\right)}\right)$$

Donc : $U_C(t_2) = E\,(1 - e^{-Ln2}) = E\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

Donc : $U_C(t_2) = \frac{E}{2}$

$$\xi = \frac{1}{2} . C. \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\xi = \frac{1}{8} . C.E^2}$$

Exercice 4

1. D'après la 2ème loi de Newton :

$$\vec{F} = m . \vec{a}_G$$

$$\begin{cases} F_x = m.a_x \\ F_y = m.a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{F_x}{m} \\ a_y = \frac{F_y}{m} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} ax = \frac{0,2}{0,1} = 2\ m.s^{-2} \\ ay = \frac{0,4}{0,1} = 4\ m.s^{-2} \end{cases}$$

2. On a : $\begin{cases} V_x = a_x . t + V_{ox} \\ V_y = ay . t + V_{oy} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} V_x = 2.t + 4 \\ V_y = 4.t + 8 \end{cases}$

Car : $V_{ox} = 4\ m.s^{-1}$ et $V_{oy} = 8\ m.s^{-1}$

3. Les équations horaires sont :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x\, t^2 + V_{ox}.t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} ay.\, t^2 + V_{oy}.t + y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = t^2 + 4t \\ y(t) = 2.t^2 + 8.t \end{cases}$$

car : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

et on a : $y = 2\,(t^2 + 4t)$

et comme : $x = t^2 + 4t$

On a alors : $\boxed{y = 2.x}$

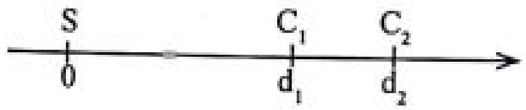
physique

Exercice 1

Une source sonore S émet dans l'air un son pur de fréquence $\nu = 1000Hz$.

Le son est reçu par 2 capteurs sonores C_1 et C_2 situés à des distances respectives de la source S : d_1 et d_2. C_1, C_2 et S se trouvent sur la même direction.

On donne la célérité du son dans l'air v = 340m/s.



1. Calculer la longueur d'onde du son :

$\lambda =$

2. On donne : Δt = 10ms (la durée séparant la détection du son par C_1 et C_2) et d_1 = 680m. Calculer d_2 :

$d_2 =$

Exercice 2

Une bille de masse m glisse sans frottement sur un support AB sous forme d'un quart de cercle de rayon r.

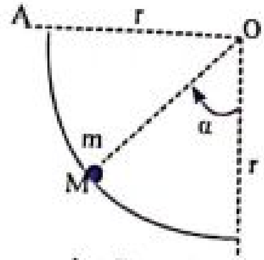
La bille quitte le point A sans vitesse initiale.

1. Exprimer la vitesse de la bille au point M en fonction de : g, r et α.

$v_M =$

2. Ecrire l'intensité de la réaction $\vec{R}$ du support AB, au point M en fonction de : m, g, α.

$v_M =$



3. Exprimer R au point B en fonction de m et g.

R =

Exercice 3

Le polonium $^{210}_{84}Po$ est un élément radioactif, il émet le plomb $^{206}_{82}Pb$, sa demi-vie est : $t_{1/2}$ = 130 jours.

1. Ecrire l'équation de désintégration de cet élément.

....

2. Soit m0 = 96g la masse de 21084Po. à la date t = 0s.

2.1- Donner la masse de l'échantillon à l'instant t en fonction de : m_0, t, $t_{1/2}$.

m =

2.2- Calculer m à t = 520 jours :

m =

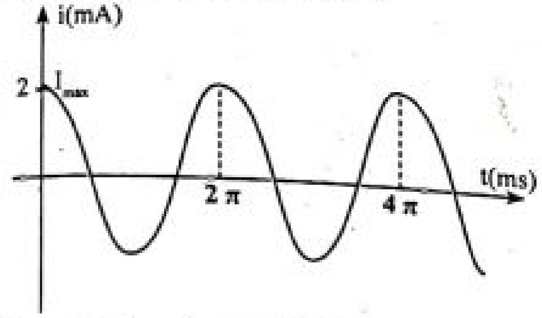
Exercice 4

On charge un condensateur de capacité C = 1µF sous une tension continue.

On branche le condensateur chargé à une bobine de résistance négligeable et d'inductance L = 1H

Scanné avec CamScanner

L'intensité du courant qui traverse le circuit est donnée par la courbe suivante :



1. Donner l'équation différentielle que vérifie la tension U_C aux bornes du condensateur.

....

2. Calculer l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit électrique :

$\xi =$

3. Ecrire l'expression littérale de la tension U_C à la date t en fonction de : t, I_{max}, C, T_0.

$U_C =$

4. Calculer U_C à $t = T_0$ (Période propre des oscillations)

$U_C =$

Solutions

Exercice 1

1. On a : $V = \lambda . \nu$

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{340}{1000}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}34m}$$

2. On a : $V = \frac{d_2 - d_1}{\Delta t}$

Donc : $d_2 = d_1 + v . \Delta t$

$$d_2 = 680 + 340 \times 10.10^{-3}$$

$$\boxed{d_2 = 683{,}4m}$$

Exercice 2

1. D'après théorème d'énergie cinétique entre A et M :

$$E_C(M) - EC(A) = \underset{A \to M}{W(\vec{P})} + \underset{A \to M}{W(\vec{R})}$$

$$\frac{1}{2} mV_M^2 - 0 = m.g.h + 0$$

où : $h = r.\cos(\alpha)$

Donc : $V_M^2 = 2\,g.h$

C'est-à-dire : $V_M = \sqrt{2.g.r.\cos\alpha}$

2. D'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$$

Projection sur $(M, \vec{n})$ dans le repère de Frenet :

$$-p.\cos\alpha + R = m.aN \quad \text{où} \quad a_N = \frac{V_M^2}{r}$$

$$\Rightarrow R = m.\frac{2.g.r.\cos\alpha}{r} + m\,g\,\cos\alpha$$

$$\boxed{R = 3.m.g.\cos\alpha}$$

3. Au point B : $\alpha = 0$

Donc : $\boxed{R = 3.m.g}$

Exercice 3

1. Équation de désintégration :

$$^{210}_{84}Po \rightarrow \, ^{206}_{82}Pb + \, ^{4}_{2}He$$

2.1- D'après la loi de décroissance radioactive :

$$m = m_0 . e^{-\left(\frac{Ln2}{t_{1/2}} . t\right)}$$

2.2- $m = m_0 . e^{-\left(\frac{Ln2}{130} \times 520\right)}$

$$= m_0 . e^{-(4.Ln2)} = \frac{m_0}{e^{Ln(2^4)}}$$

physique

Scanné avec CamScanner

$$m = \frac{m_0}{16} = \frac{96}{16}$$

$$\boxed{m = 6g}.$$

Exercice 4

1. Équation différentielle vérifiée par U_C :

$$U_C + U_L = 0$$

$$U_C + L.\frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$U_C + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_C = 0.$$

2. L'énergie totale emmagasinée dans le circuit :

$$\xi = E_{m(max)}$$

$$= \frac{1}{2}.L.I_{max}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (2.10^{-3})^2$$

$$\boxed{\xi = 2.10^{-6}\ J}$$

3. On a : $i(t) = I_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

ou : $\varphi = 0$

Donc : $i(t) = I_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

et d'après la loi d'additivité des tension :

$$U_C + U_L = 0$$

$$U_C = -UL$$

$$U_C = -L.\frac{di}{dt}$$

$$U_C = L \times I_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

et comme : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Donc : $L = \frac{T_0^2}{(2\pi)^2.C}$

On remplace dans U_C :

$$U_C = \frac{T_0^2}{(2\pi)^2.C}.I_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$\boxed{U_C = \frac{T_0}{2\pi}.\frac{I_m}{C}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)}$$

4. $U_C(T_0) = \frac{T_0}{2\pi}.\frac{I_m}{C}.\sin(2\pi)$

$$= 0$$

physique

Scanné avec CamScanner

Fin !!

Bon courage ♡

Scanné avec CamScanner